

Expérimentation et modélisation du comportement des structures gonflables sous chargement aéroélastique aux états -limites

Alexis BLOCH

Décembre 2015

Table des matières

Introduction	9
1 Aspects généraux, contexte et enjeux	11
1.1 Le textile dans la construction	13
1.1.1 Les structures textiles	13
1.1.2 Les structures gonflables	14
1.2 Les textiles techniques	16
1.2.1 Les tissus : une définition	16
1.2.2 Armures de tissus	17
1.2.3 Enduction et revêtement	17
1.2.4 Comportement mécanique	18
1.2.5 Résultats d'essais de caractérisation sur des textiles	23
1.3 Contexte	24
1.3.1 Guide et recommandations pour les structures textiles	25
1.3.2 Eurocodes	25
1.4 Enjeux et motivations	27
2 Enrichissement et développement de modèles de poutre gonflable	29
2.1 Introduction	34
2.2 Modèles de poutres gonflables : état de l'art	35
2.2.1 Définition de l'état initial	35
2.2.2 Modèles analytiques de poutre gonflable	36
2.2.3 Formules analytiques de déplacement pour les poutres gonflables	37
2.2.4 Modèles éléments finis pour les poutres gonflables	41
2.2.5 Élément fini de poutre gonflable à deux nœuds	42
2.2.6 Cas de la dynamique	44
2.2.7 Charge de pli - Charge de ruine	45
2.2.8 Conclusion	46
2.3 Charge de ruine pour une poutre gonflable	47
2.3.1 Contraintes dues à la mise en pression	47
2.3.2 État de la contrainte pour une poutre gonflable en flexion	48
2.3.3 Expression de la rotule pneumatique	51
2.3.4 Charge de ruine pour une poutre gonflable	52
2.4 Expression analytique du déplacement post-plissage	53
2.4.1 Notion de zone détendue	53
2.4.2 Poutre droite fictive équivalente	54
2.4.3 Intégration des équations d'équilibre	56
2.5 Étude numérique d'une poutre en flexion	64
2.5.1 Description du problème	64

2.5.2	Modélisation Numérique	65
2.5.3	Résultats	66
2.5.4	Comparaison des résultats du calcul numérique 3D et du modèle analytique sur le calcul du déplacement	72
2.6	Adaptation de la rigidité de l'élément fini poutre gonflable	73
2.6.1	Prise en compte de l'orthotropie	73
2.6.2	Algorithme	74
2.6.3	Comparaison des résultats avec le calcul numérique 3D et le modèle analytique . . .	75
2.7	Étude expérimentale d'une poutre gonflable en flexion 3 points	77
2.7.1	Présentation et objectifs de l'essai	77
2.7.2	Fabrication des poutres	77
2.7.3	Montage et appareillage	79
2.7.4	Résultats	82
2.7.5	Conclusion	83
2.8	Utilisation de l'élément fini sur un problème plus complexe	84
2.8.1	Présentation du cas-test	84
2.8.2	Construction des modèles	84
2.8.3	Résultats	86
2.9	Conclusion	90
3	Adaptation et développement d'outils de mesure pour les structures gonflables	91
3.1	Introduction	95
3.2	La Corrélation d'Image Virtuelle	97
3.2.1	L'image virtuelle	97
3.2.2	La fonction de corrélation	99
3.2.3	Algorithme de résolution	99
3.2.4	Équation de la déformée d'une poutre gonflable	99
3.3	Validation sur une image de synthèse	103
3.3.1	Construction de l'image de synthèse de référence	103
3.3.2	Étude de l'image synthétique	104
3.3.3	Influence de la largeur du contour virtuel	106
3.3.4	Influence d'un bruit gaussien sur la solution	107
3.4	Utilisation sur des images expérimentales	109
3.4.1	Dispositif expérimental	109
3.4.2	Protocole expérimental	113
3.4.3	Résultats	114
3.5	Développement de capteurs de pression	119
3.5.1	Recherche de forme	119
3.5.2	Fabrication	120
3.5.3	Test des capteurs en soufflerie	121
3.6	Conclusion	125
4	Étude expérimentale, modèles réduits et similitudes	127
4.1	Introduction : les essais en soufflerie	131
4.1.1	Les souffleries	131
4.1.2	Un outil de dimensionnement dans le Génie Civil et la Construction	131
4.1.3	La nécessité des essais en soufflerie pour les structures gonflables	132
4.1.4	Les verrous scientifiques à lever	133
4.2	Étude de la traînée d'une poutre gonflable en soufflerie	134

4.2.1	Montage expérimental	134
4.2.2	Étude analytique de poutre	136
4.2.3	Protocole expérimental	136
4.2.4	Résultats	137
4.3	Règles de mises à l'échelle, similitudes	142
4.3.1	Adimensionnement des équations	142
4.3.2	Théorème de Vashy-Buckingham	143
4.3.3	Étude numérique de structures gonflables en deux dimensions à différentes échelles	145
4.4	Étude expérimentale d'un bâtiment gonflable à différentes échelles	150
4.4.1	Objectif et présentation de l'essai	150
4.4.2	Réalisation des maquettes	151
4.4.3	Montage expérimental	152
4.4.4	Remarques générales et aspects techniques sur le déroulement des essais	156
4.4.5	Identification expérimentale des charges de plissage et de ruine	156
4.4.6	Mesure du champ de pression	161
4.4.7	Mesure du déplacement - rapport d'échelle	168
4.4.8	Conclusion	177
4.5	Conclusion	177
Conclusion et perspectives		179
Bibliographie		180
Annexe - Fiches Techniques des Tissus		186

Avant Propos

Ce document présente une synthèse de mes travaux de thèse effectués en collaboration avec l'Université de Nantes et le Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB). Ces travaux ont été financés par le GIS Lirgec et la région Pays de la Loire. Ces travaux ont également été soutenus par la société Serge Ferrari qui a fourni les textiles et l'entreprise ATC qui a mis ses machines à notre disposition.

Introduction Générale

Les structures gonflables, plus généralement les structures textiles, connaissent actuellement un essor, notamment dans le Génie Civil et la construction, en raison de leurs nombreux avantages. Ce sont des structures légères, facilement transportables et faciles à stocker. Elles constituent une solution à l'accueil de public ou la protection de matériel de façon plus ou moins permanente. Parmi les structures gonflables, certaines sont constituées d'assemblages d'éléments simples (poutres, plaques...) pressurisés. La pression interne apporte à la structure sa rigidité et lui permet ainsi de résister à des sollicitations extérieures. Face à l'importance prise par le textile dans la construction et le Génie Civil, le Comité Technique 250 du Comité Européen de Normalisation (CEN-TC-250) a décidé la création du groupe de travail WG5 chargé de l'écriture d'un document technique pouvant servir de base à un futur Eurocode relatif aux structures membranaires. Le dimensionnement de ces structures dans une approche semi-probabiliste telle que proposée dans les Eurocodes nécessite la définition des états limites, la caractérisation du chargement et l'utilisation de modèles de comportement adéquats.

Le projet mené dans cette thèse consiste à travailler sur ces états limites afin de proposer une méthode de dimensionnement pour les structures gonflables compatible au format Eurocode. L'étude se focalise sur le comportement d'une poutre gonflable, élément de base de structures assemblées, pour lequel plusieurs verrous scientifiques restent à lever :

- **Étude comportementale** : L'objectif de cette partie est d'identifier les états-limites pour une poutre gonflable et de caractériser les paramètres prépondérants à prendre en compte dans le dimensionnement. L'état-limite de service s'exprime dans cette étude de deux façons. La première est l'apparition du pli et la seconde est l'expression d'un déplacement maximal. L'état limite ultime se traduit par la ruine de la poutre.
- **Développement et adéquation des modèles** : plusieurs modèles de poutre gonflables (analytiques et numériques) existent dans la littérature. Seulement ces modèles sont limités à l'étude d'une poutre gonflable avant l'apparition d'un pli. L'enjeu de cet axe est de confirmer l'adéquation des modèles existants avec des résultats expérimentaux et de proposer des solutions pour modéliser le comportement de la poutre au delà du pli juste formé, et ce, jusqu'à la ruine de la poutre.
- **Recherche d'une loi de similitude** : L'enjeu à terme est de pouvoir étudier le comportement de structures gonflables sous chargement climatique. La caractérisation de ce chargement reste limitée sans la réalisation d'essais en soufflerie. Les structures actuelles présentent parfois de grandes dimensions qui limitent la possibilité d'étude en soufflerie. Le verrou scientifique à lever repose sur l'élaboration de modèles réduits permettant l'étude d'une structure imposante, reproduite à taille réduite, en soufflerie.

La démarche suivie pour répondre à la problématique se décompose en quatre étapes constituant chacune un chapitre de ce mémoire.

- Le premier chapitre introductif est dédié aux aspects généraux, au contexte et aux enjeux de ce travail. Il présente dans un premier temps l'utilisation de textile dans la construction et le génie civil, puis un

état de l'art sur la caractérisation des tissus dans un second temps. Il aborde dans un troisième temps le contexte de normalisation dans lequel se situe l'étude.

- Le second chapitre est dédié aux modèles. Une première étude bibliographique est menée pour établir un état de l'art des modèles de comportement d'une poutre gonflable. Cette étude permet de focaliser le travail analytique sur la charge de ruine et le déplacement post-plissage, la charge de pli et le comportement pré-plissage étant déjà maîtrisés. Le travail analytique mène à l'identification de la charge de ruine pour une poutre gonflable qui est ensuite validée par une étude expérimentale puis numérique. Ce chapitre apporte finalement des outils pour prévoir la ruine d'une poutre gonflable et modéliser le comportement jusqu'à la ruine.
- Le troisième chapitre apporte des solutions permettant la réalisation d'essais pour l'étude comportementale et le développement d'une loi de similitude. Une poutre gonflable subit de grands déplacements, ce qui nécessite d'avoir à disposition des outils de mesure adaptés à ce comportement ainsi qu'à la nature même des poutres gonflables (impossibilité de percer, faible masse...). Ce chapitre introduit une méthode de mesure innovante : la Corrélation d'Image Virtuelle (VIC) qui repose sur un traitement d'image entre la déformée d'une structure et une déformée de référence donnée par un modèle. L'apport majeur de la thèse dans ce chapitre est l'adaptation de la VIC au cas du gonflable par l'implémentation des solutions développées au second chapitre. Cet apport permet non seulement de disposer d'un outil adapté au comportement spécifique d'une poutre gonflable mais également de statuer sur l'adéquation des modèles développés au travers d'un cas test. Ce second chapitre présente également un capteur de pression développé spécifiquement pour la caractérisation du chargement climatique appliqué dans la soufflerie. Ces outils sont mis en œuvre dans le quatrième chapitre.
- Le quatrième chapitre est dédié à l'étude de structures gonflables en soufflerie. La méthode de mesure est, dans un premier temps, appliquée sur une poutre gonflable puis, dans un second temps, sur un bâtiment demi-cylindrique fabriqué à plusieurs échelles. L'objectif du chapitre est la validation des modèles de ruine et de déplacement ainsi que la recherche d'une loi des similitudes. Ce chapitre montre la possibilité de construire un modèle réduit sous certaines conditions et permet l'identification des états-limites de pli et de ruine sur une structure plus complexe qu'une poutre.

Chapitre 1

Aspects généraux, contexte et enjeux

Résumé : Ce premier chapitre présente des aspects généraux concernant les structures gonflables, il présente le contexte, les enjeux et les motivations du travail.

1.1 Le textile dans la construction	13
1.1.1 Les structures textiles	13
1.1.2 Les structures gonflables	14
1.2 Les textiles techniques	16
1.2.1 Les tissus : une définition	16
1.2.2 Armures de tissus	17
1.2.3 Enduction et revêtement	17
1.2.4 Comportement mécanique	18
Un matériau hétérogène visco-élastique	18
Caractérisation du matériau	20
1.2.5 Résultats d'essais de caractérisation sur des textiles	23
1.3 Contexte	24
1.3.1 Guide et recommandations pour les structures textiles	25
1.3.2 Eurocodes	25
1.4 Enjeux et motivations	27

1.1 Le textile dans la construction

1.1.1 Les structures textiles



Fig. 1.1 – Reconstitution du vélum sur le Colisée de Rome (source internet).



Fig. 1.2 – Toit du Stade National de Brasilia construit en 2014 (REUTERS/Ueslei Marcelino).

L'utilisation de textile, et plus généralement de membrane, n'est pas nouvelle dans la construction. Depuis l'origine des civilisations, les hommes ont cherché à se protéger des aléas de la nature développant ainsi les premiers habitats. Des matériaux souples tels que des peaux de bête ou des feuillages furent introduits dès le début et disposés sur des charpentes constituées de bois ou d'os. Ces structures, peu élaborées, ne présentent pas une grande résistance à l'environnement mais constituent les premières traces d'architecture membranaire. L'apparition du textile proprement dit dans la construction remonte à l'Antiquité. En effet, avec la sédentarisation de certaines populations la construction connaît un essor et l'utilisation de toiles tendues par les bâtisseurs romains est certaine. Le vélum du Colisée de Rome, sur la figure 1.1, en est une illustration. Il présente une technologie innovante : un anneau placé au centre de l'édifice retenu par des câbles tendus permet le déploiement de toiles sur ces derniers mettant ainsi le spectateur à l'abri du soleil ou des intempéries (ce système imaginé par les romains est toujours d'actualité puisque le Stade National de Brasilia, sur la figure 1.2, construit à l'occasion de la coupe du monde de football 2014, présente un toit à l'architecture très proche). L'évolution des techniques de construction et le progrès technologique font que les textiles ne sont pas utilisés de manière intensive dans les réalisations humaines. Ils le sont davantage dans des installations temporaires comme les habitations conçues par les populations nomades. Ce n'est qu'au XX^e siècle que le textile fait sa réapparition de manière permanente dans la construction, notamment en raison des possibilités géométriques et esthétiques que le matériau propose. L'un des maîtres de l'art dans l'architecture textile est l'allemand Frei OTTO qui compte notamment le pavillon de l'Allemagne de l'Ouest à l'Exposition Universelle de Montréal (1967) et les installations olympiques de Munich (1972) parmi ses réalisations. Ces structures sont présentées sur les figures 1.3 et 1.4. L'utilisation du textile s'est démocratisée et est de plus en plus présente de nos jours dans l'architecture.



Fig. 1.3 – Installation des Jeux Olympiques de Munich 1972 (Wikipédia).



Fig. 1.4 – Pavillon de l'Allemagne de l'Ouest à l'Expo'67 Montréal (Archives Canada).

1.1.2 Les structures gonflables

On distingue deux catégories dans l'architecture textile. La première est constituée des installations pour lesquelles les membranes sont tendues mécaniquement comme par exemple le campus Luigi Einaudi de Turin, sur la figure 1.5(a), ou la grande mosquée de Paris, sur la figure 1.5(b), et la seconde catégorie est constituée des installations pour lesquelles la prétension résulte d'une pressurisation. On distingue dans cette seconde catégorie trois sous familles représentées sur la figure 1.6. Les monomembrane qui sont maintenues par un gradient de pression entre l'extérieur et l'intérieur du bâtiment, les coussins qui sont des éléments à double paroi pressurisé puis mis en tension et les poutres (ou panneaux) gonflables qui sont des structures à double paroi pour lesquelles la pression de gonflage contribue seule à la rigidité.

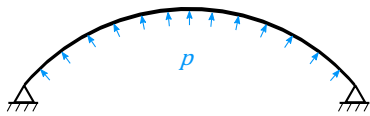


(a) Campus Luigi Einaudi, Turin, Italie (2012)

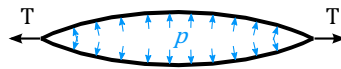


(b) Grande Mosquée, Paris, France (2013)

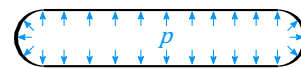
Fig. 1.5 – Exemple d'architecture où le textile est tendu mécaniquement.



(a) monomembrane pressurisée

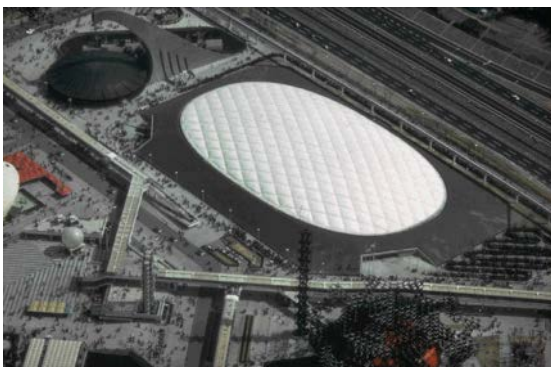


(b) coussin gonflable



(c) poutre gonflable

Fig. 1.6 – Différents types de structures gonflable [S⁺15].



(a) extérieur du bâtiment



(b) intérieur du bâtiment

Fig. 1.7 – Présentation du Pavillon Américain construit pour l'Exposition Universelle Osaka'70 : (a) vue extérieure et (b) vue intérieure.

Une des premières utilisation du gonflable dans l'architecture de l'Histoire remonte à l'exposition universelle Osaka'70. Parmi les trois réalisations gonflables présentes à Osaka, le pavillon américain est l'œuvre de

l'ingénieur David H. Geiger. Le bâtiment est visible sur la figure 1.7. Son toit est constitué d'une monomembrane pressurisée. Ce dernier couvre une surface de 9290 m^2 avec une flèche d'un peu plus de 2 m au centre du bâtiment [Gei70]. Le toit est constitué d'une seule membrane maintenue par des câbles en acier, ainsi le gonflage s'effectue en imposant une pression plus importante à l'intérieur du bâtiment qu'à l'extérieur : la surpression est d'environ 200 Pa [Gei70]. Le pavillon Fuji, également réalisé pour l'exposition universelle de 1970, est une structure gonflable autoportée constituée d'un assemblage d'arches élémentaires. Il est visible sur la figure 1.8. Cette réalisation est un exemple de structure constituée de poutres gonflables que l'on cherche à modéliser dans ce travail de thèse.



Fig. 1.8 – Pavillon Fuji à l'Exposition Universelle Osaka'70.

Les toitures gonflables connaissent un essor dans les années qui suivent puis atteignent une apogée dans les installations sportives avec la multiplications des projets comme le Silverdome de Pontiac (1975), le BC Place de Vancouver (1983) ou bien les installations olympiques de Séoul (1988). Après la mort de Geiger en 1989, le gonflable est peu à peu délaissé au profit des membranes tendues. Comme un symbole, le début du XXI^e siècle voient le dégonflage de plusieurs toitures gonflables même si quelques unes subsistent aujourd'hui comme le Tokyo Dome (1988). A partir du milieu des années 2000, l'architecture gonflable connaît un renouveau. Des toitures plus modestes font leur apparition pour protéger des cours de tennis ou des piscines. Un nouvel usage du gonflable se développe parallèlement : les éléments gonflables sont utilisés comme élément architectural et non comme élément structurel. C'est le cas précis des coussins ETFE dont l'Allianz Arena de Munich est un exemple.



(a) Allianz Arena (2005), Munich, Allemagne (Wikipédia)



(b) « le nuage » (2014), centre sportif, Montpellier, France (©Louis Ferdinand)

Fig. 1.9 – Exemple de bâtiment intégrant des éléments architecturaux gonflables (coussins ETFE) : (a) Allianz Arena de Munich et (b) Centre sportif « le nuage » à Montpellier.

Mais c'est en réalité dans des applications temporaires que les bâtiments gonflables connaissent une forte croissance. Ils sont aujourd'hui une alternative crédible à des structures d'accueil comme les chapiteaux ou les structures métalliques légères. Des bâtiments gonflables sont aujourd'hui utilisés lors d'opérations menées par des ONG ou l'armée. On voit par exemple l'hôpital de campagne déployé en zone Ebola par médecins sans frontières et un bâtiment de stationnement ou de maintenance pour du matériel aérien sur la figure 1.10.



Fig. 1.10 – Hôpital gonflable de Médecins sans frontières (gauche) et bâtiment militaire (droite).

Face à l'importance prise par les structures textiles, les méthodes de calcul se développent et la connaissance des matériaux progresse. Ainsi, de nouvelles problématiques apparaissent liées par exemple au cycle de vie et au recyclage de matériau, ou à la recherche de forme, la souplesse du matériau permettant de nombreuses possibilités géométriques.

1.2 Les textiles techniques

Les structures gonflables sont constituées de parois textiles qui enferment un volume d'air pressurisé afin d'apporter à la structure rigidité et stabilité. Dans l'élaboration des structures gonflables les tissus sont sélectionnés d'abord en fonction de leur tenue mécanique, on parle alors de textiles techniques [DGE05]. La compréhension du comportement des textiles est indispensable à la modélisation d'une structure gonflable. Ce paragraphe s'intéresse à la constitution des tissus et à leur comportement mécanique.

1.2.1 Les tissus : une définition

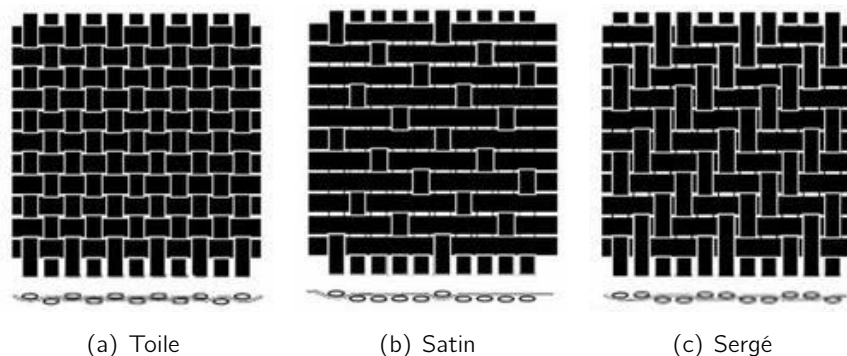
Un tissu est défini dans le Larousse comme la « *surface obtenue par l'assemblage régulier de fils (ou de fibres), disposé(e)s en deux séries croisées à angle droit* ». Cette définition, bien que stricte sur l'angle d'entrecroisement, reste vague sur la nature des fibres employées. Ces dernières peuvent être d'origine naturelle (animale ou végétale) artificielle (verre, carbone, métal) ou synthétique (polyamide, polyester...). Dans le domaine du gonflable, les fibres artificielles et synthétiques sont préférées aux fibres naturelles en raison de leurs meilleures propriétés mécaniques et de leur durabilité. Les fibres synthétiques présentent des caractéristiques de résistance sensiblement dix fois plus élevées par rapport aux fibres végétales [ML93]. Les propriétés mécaniques de quelques fibres sont présentées dans le tableau 1.1. Dans la définition, les fils s'organisent en deux séries. Dans la terminologie, ces deux séries constituent la chaîne, qui est construite par l'ensemble des fils parallèles au sens d'avancement du tissu lors de la fabrication, et la trame, formée par le regroupement des fils perpendiculaires au sens d'avancement du tissu. La régularité évoquée dans la définition est appelée armure du tissu.

Tab. 1.1 – Propriétés mécaniques des principales fibres synthétiques [ML93]

Nature des fibres	Masse Volumique (kg/dm^3)	Densité relative par rapport au polyester	Module de Young (MPa)	Résistance à la rupture (MPa)
Polyester	1.2	1	6 000	750
Verre	2.54	2.12	78 000	2 200
Carbonne	1.74	1.45	200 000	2 100
Kevlar	1.45	1.2	130 000	2 900

1.2.2 Armures de tissus

Dans la terminologie, l'armure est le mode d'entrecroisement des fils de chaîne et de trame. Les principales armures rencontrées sont les toiles (Fig. 1.11(a)), les satins (Fig. 1.11(b)) et les sergés (Fig. 1.11(c)). Dans le cas de la toile, les fils de trame passent alternativement au-dessus puis au-dessous des fils de chaîne et réciproquement : c'est la structure la plus simple et la moins déformable mécaniquement. Les satins et les sergés sont proches, les premiers sont généralement définis par 4 ou 8 selon que le fil de trame n'entrecroise qu'un fil de chaîne sur 4 ou 8. Concernant les sergés, le fil de trame n'entrecroise qu'un fil de chaîne sur 3, 4 ou 5, et passe par dessus les autres fils de chaîne. Le satin offre la plus grande souplesse au tissu. Les sergés se caractérisent à la fois par leur souplesse et leur densité.

**Fig. 1.11** – Armures fondamentales des tissus.

Lors du tissage, la notion d'équilibre est introduite. Un tissu est dit équilibré lorsque la masse surfacique des fils de trame est proche de la masse surfacique des fils de chaîne. En d'autres mots, un tissu qui dispose de fils de tailles égales dans la trame et dans la chaîne, et disposés de sorte qu'il y ait le même nombre de fils sur une longueur de référence dans la trame et dans la chaîne est équilibré.

1.2.3 Enduction et revêtement

L'utilisation des membranes (qu'elles soient tendues mécaniquement ou pressurisées) dans des constructions permanentes nécessite une bonne résistance des textiles techniques au vieillissement et aux attaques du milieu (pollution, climat...). Une enduction est appliquée aux textiles techniques en réponse à ces besoins. Cette enduction comporte plusieurs couches ayant chacune une fonction particulière (Fig. 1.12). La première couche réalisée est la couche d'adhésion dont le rôle est d'assurer la liaison entre les fils de chaîne et de trame et les couches de protection. La seconde couche est la couche de protection. Cette dernière doit s'adapter au comportement du tissu sur lequel elle s'applique. Elle doit également obéir à certains critères comme la capacité adhésive, de bonnes propriétés d'endurance et une bonne résistance aux dégradations environnementales. Les enductions les plus fréquemment utilisées sont le PVC (polychlorure de vinyle), le

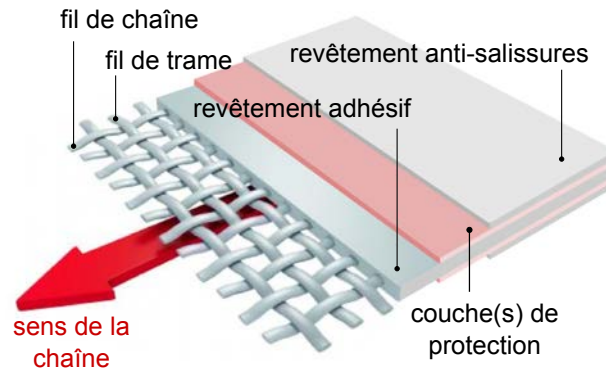


Fig. 1.12 – Vue en coupe d'un textile technique enduit.

PTFE (polytétrafluoréthylène) et l'ETFE (éthylène tétrafluoroéthylène). Le PVC est l'enduction la plus généralement choisie en raison de ses tarifs attractifs. Le PTFE est résistant aux dégradations thermiques mais également à la corrosion. Le revêtement le plus performant est l'ETFE qui en plus des ses performances en durabilité présente également une rigidité supérieure à celles des autres polymères d'enduction. L'ETFE est favorisé pour des applications nécessitant une excellente résistance aux chocs et aux fissures. La dernière couche d'enduction, dont le but est de limiter l'encrassement, le vieillissement prématuré et l'attaque des rayons ultraviolets, est généralement réalisée en PVF (polyfluorure de vinyle) auquel s'ajoute un traitement anti-microbien.

1.2.4 Comportement mécanique

Un matériau hétérogène visco-élastique

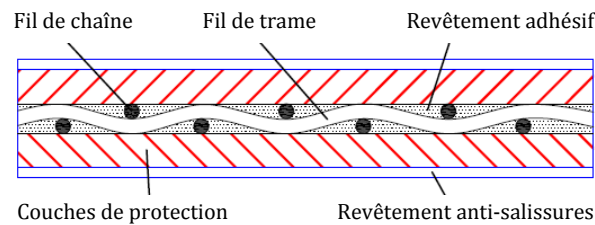


Fig. 1.13 – Hétérogénéité d'un tissu enduit [Mai96].

La nature même du textile laisse à penser qu'il se comporte de manière orthotrope et que ses propriétés mécaniques dépendent directement de celles des fils de chaîne et de trame. Cependant, le comportement mécanique ne dépend pas uniquement de la géométrie des fils mais également de l'interaction entre les fils de chaîne et de trame et de l'interaction entre les fils et les couches d'enduction. Le textile se rapproche en réalité d'un matériau hétérogène [CJS03][PSI07] comme présenté sur la figure 1.13. Cependant, les tissus sont souvent examinés d'un point de vue macroscopique dans le cadre d'études théoriques ou numériques ou même au cours de l'exploitation de données expérimentales, ils sont alors considérés comme des milieux homogènes [Suq85].

Le comportement mécanique des tissus fait l'objet de nombreuses études actuellement. Récemment, Gosling [Gos07] a par exemple développé une loi de comportement orthotrope particulière, dont la matrice souplesse est asymétrique, pour les tissus. L'asymétrie est le résultat de l'interaction des fils et l'aspect multicouche (fibre et résine) des tissus enduits. Le modèle est construit à partir des résultats d'essais biaxiaux effectués sur différents tissus. Le modèle présente une bonne corrélation avec les essais réalisés qui balayent l'ensemble des ratios chaîne/trame possibles. Plus généralement, un des modèles les plus utilisés dans la

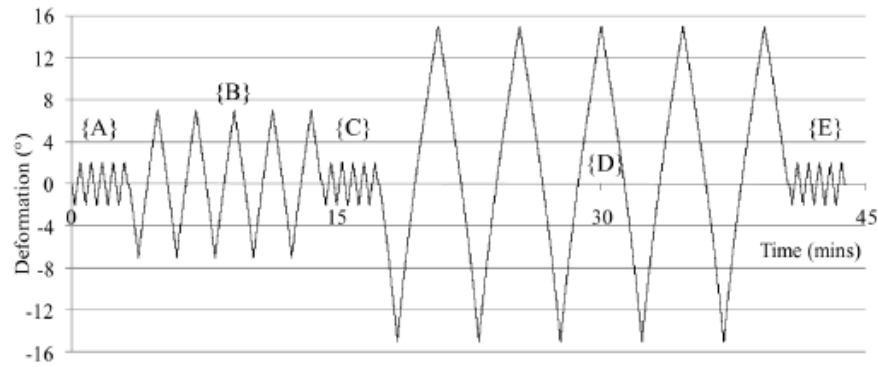
littérature est le modèle orthotrope. En effet, un milieu est considéré comme orthotrope s'il possède trois plans de symétrie. Son comportement élastique est alors décrit par les 9 coefficients du tenseur d'élasticité. En configuration naturelle (*i.e.* sans aucun chargement), on peut considérer qu'il y a bien 3 plans de symétrie, même si ce n'est pas complètement vrai. On suivra toutefois la pratique courante qui est de considérer le matériau comme un milieu homogène et orthotrope. La loi de comportement

$$\begin{Bmatrix} E_{\ell\ell} \\ E_{tt} \\ 2E_{\ell t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_\ell} & -\frac{\nu_{\ell t}}{E_\ell} & 0 \\ -\frac{\nu_{t\ell}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\ell t}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_{\ell\ell} \\ \Sigma_{tt} \\ 2\Sigma_{\ell t} \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

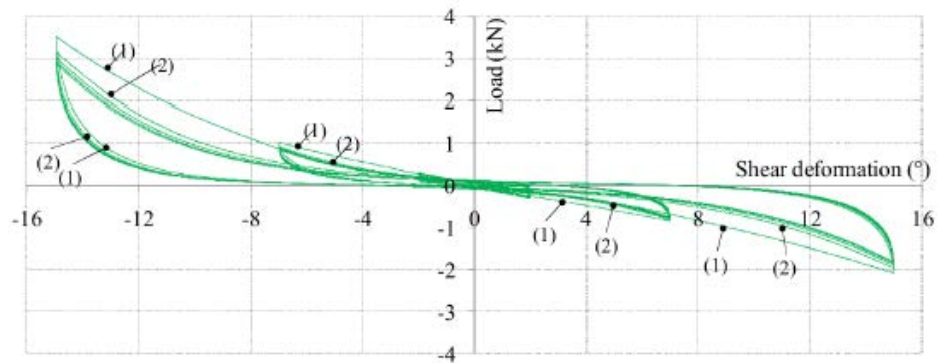
relie alors les déformations ($E_{\ell\ell}$, E_{tt} , $E_{\ell t}$) aux contraintes ($\Sigma_{\ell\ell}$, Σ_{tt} , $\Sigma_{\ell t}$), où les indices ℓ et t sont relatifs aux directions d'orthotropie, par l'intermédiaire des propriétés mécaniques. E_ℓ et E_t sont les modules de Young suivant les directions de chaîne et de trame, $\nu_{\ell t}$ et $\nu_{t\ell}$ sont les coefficients de Poisson et $G_{\ell t}$ le module de cisaillement. La matrice de souplesse

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_\ell} & -\frac{\nu_{\ell t}}{E_\ell} & 0 \\ -\frac{\nu_{t\ell}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\ell t}} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

est symétrique.



(a) Cycles de chargements



(b) Courbe charge-déformation

Fig. 1.14 – Influence de l'historique du chargement sur le comportement du tissu [JBG09].

En sortie de chaîne de fabrication, un tissu présente un comportement différent de celui observé après plusieurs cycles de chargement. Ce phénomène est connu sous le nom d'embuvage. Ce dernier traduit l'apparition de déformations plastiques lors des premières mises sous tension. Ces déformations sont dues au fait que les fils de chaîne et de trame s'ordonnent et prennent leur position définitive. Le matériau se

stabilise au bout de quelques cycles. L'étude de Jackson et al. [JBG09] illustre bien ce phénomène. Ils ont travaillé sur la caractérisation expérimentale du module de cisaillement d'un tissu. Le protocole consiste à appliquer 5 séries de chargement composées chacune de 5 cycles (fig. 1.14(a)). Les résultats (fig. 1.14(b)) montrent que la convergence s'effectue à partir de la troisième série.

Caractérisation du matériau

La caractérisation des tissus repose sur des essais : les grandeurs généralement recherchées sont les modules d'Young longitudinal E_ℓ et transverse E_t , le module de cisaillement $G_{\ell t}$, le coefficient de Poisson $\nu_{\ell t}$ et éventuellement les limites d'élasticité σ_m^ℓ et/ou σ_m^t dans les directions d'orthotropie. Ce paragraphe présente les différentes méthodes couramment utilisées pour identifier le comportement mécanique du tissu. De manière générale, il est préférable de travailler avec des éprouvettes assurant une homogénéité dans la distribution des contraintes et des déformations. Les concentrations de contraintes peuvent mener à une rupture de l'éprouvette ou à une mauvaise identification.

L'essai le plus simple est l'essai de traction uniaxiale. Son but principal est la détermination de la résistance du tissu à la rupture σ_m et du module de Young (E_ℓ ou E_t) dans une direction donnée. La mise en place d'un tel essai s'effectue usuellement sur une bande de tissu (fig. 1.15(b)) ou directement sur des fils (fig. 1.15(a)). Les coefficients élastiques sont déduits de la partie linéaire (2) de la courbe force-déformation (fig. 1.15(c)). Les effets de l'embuvage sont évidents sur les courbes de réponse puisque pour les tissus une première phase non linéaire (1) est observée dans la réponse à la traction. Cette phase est absente pour le fil seul. L'avantage d'un tel essai est la rapidité et la simplicité d'exécution.

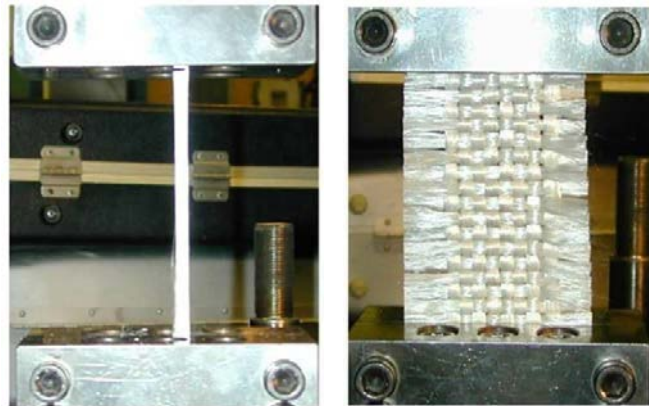
L'obtention du module de cisaillement est envisageable par la réalisation d'un essai de traction en biais [PW00][Pot02][HCL04][LHD⁺08]. Dans ce cas, l'échantillon est placé en biais (fig. 1.16(a)) par rapport à la direction de charge (*i.e.* les fils de chaîne et de trame sont orientés à $\pm 45^\circ$ par rapport à la direction de charge). La déformation n'est alors pas uniforme dans l'échantillon. Ce dernier se décompose en trois zones dont les propriétés sont différentes (fig. 1.16(b)) :

- la zone A ne se déforme quasiment pas au cours de l'essai ;
- la zone C présente une prépondérance du cisaillement ;
- la zone B est intermédiaire et présente les deux comportements.

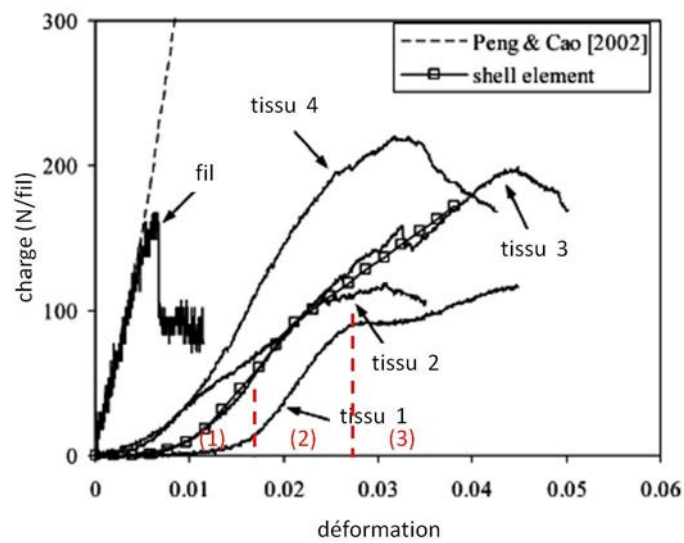
Comme pour la traction uniaxiale, la partie linéaire de la réponse permet d'établir la valeur du module de cisaillement. Cet essai est simple à mettre en œuvre mais a le point faible de créer une déformation non homogène sur l'échantillon.

A la différence de l'essai précédent, l'essai cadre photo [JBG09][LHD⁺08] permet d'appliquer une déformation homogène sur l'échantillon. Le principe de base est le même que l'essai de traction en biais : l'échantillon est placé de sorte que les fils de chaîne et de trame soient orientés à $\pm 45^\circ$ par rapport à la direction de charge. La différence s'effectue au niveau des liaisons où l'échantillon est cette fois-ci placé sur un cadre carré équipé de rotules en ses coins. Le chargement vient alors s'appliquer sur ce cadre (fig. 1.17). Ce montage a l'avantage d'assurer l'étude de contraintes de cisaillement de signes opposés [GL10a]. La limite de cet essai réside au niveau de l'installation sur le cadre. L'opération peut entraîner une mise en tension du tissu et influencer la valeur mesurée du module de cisaillement.

Il faut noter toutefois que pour les structures gonflables, et plus généralement pour des structures tendues, le tissu est sollicité de manière biaxiale. L'essai uniaxial paraît dès lors peu représentatif du comportement des structures textiles tendues. C'est pour cette raison que des essais biaxiaux sont développés. Ces

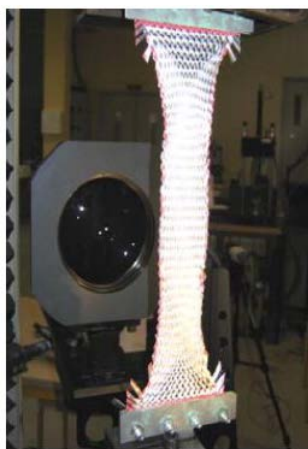


(a) Montage d'essai sur fil (b) Montage d'essai sur bande

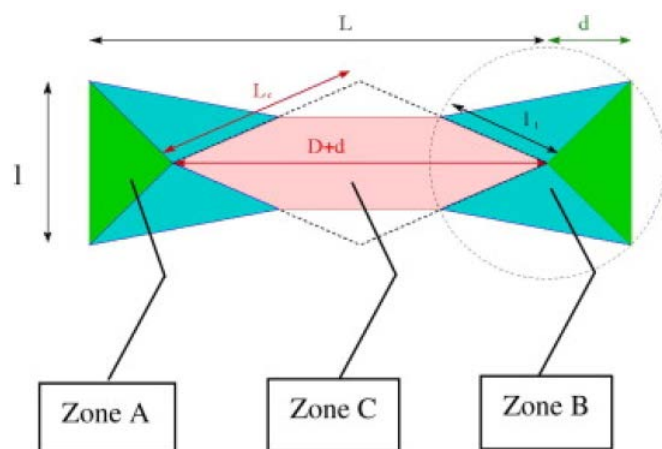


(c) Exemple de résultats

Fig. 1.15 – Exemple d'essais de traction uniaxiale [PC05].



(a) Montage d'un essai en biais



(b) Représentation des zones déformées

Fig. 1.16 – Exemple d'essais de traction de biais [LHD⁺08].

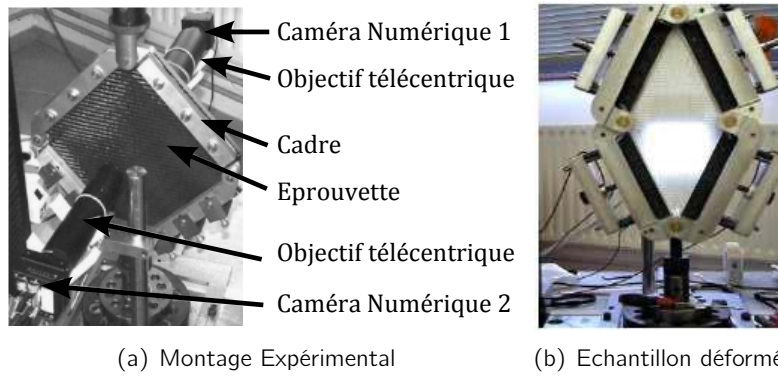


Fig. 1.17 – Exemple d'essais en cisaillement avec déformation homogène [LHD⁺08].

derniers permettent l'identification des modules de Young E_ℓ et E_t dans les deux directions d'orthotropie et du coefficient de Poisson [BGB04][GL09], et dont le montage, plus complexe, élimine les inconvénients des essais présentés jusqu'à présent. Les échantillons testés sont la plupart du temps cruciformes et montés de telle sorte que la chaîne et la trame soient orientées dans les directions de chargement. Dans les montages classiques, la fixation se fait sur quatre mords qui fonctionnent deux à deux indépendamment des autres. Ils sont actionnés de manière à appliquer différents cycles de chargements. La zone située dans le carré central de l'échantillon subit une déformation et des contraintes homogènes et quasi-uniformes permettant alors la réalisation de mesures précises. Les mesures s'effectuent simultanément dans les deux directions du tissu. Cet essai ne permet cependant pas l'identification directe du module de cisaillement. Il existe des systèmes biaxiaux plus complexes, tel que celui présenté sur la figure 1.18, où 20 mords reliés 5 à 5 sont utilisés pour maintenir l'éprouvette. Le déplacement s'applique par l'intermédiaire d'actionneurs électromécanique. La mesure est effectuée à l'aide d'extensomètres.

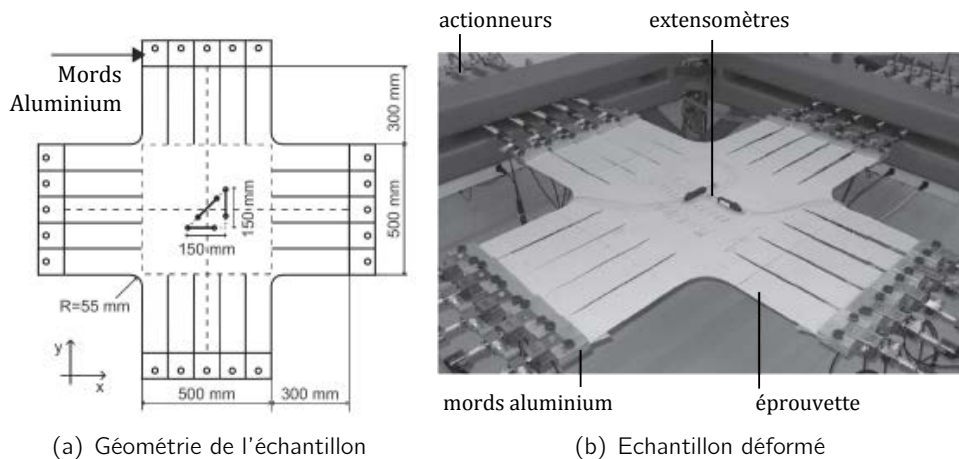


Fig. 1.18 – Exemple d'essai de traction biaxiale [GL10b].

Certains auteurs effectuent des essais de caractérisation directement sur des tubes pressurisés. Malm et al. [MDPT09] ont réalisé des essais en torsion et en flexion. Les tubes sont fabriqués de manière à ce que la chaîne et la trame soient orientées selon les directions longitudinale et circonférentielle des tubes. La dernière contribution aux essais sur des tubes pressurisés a été proposée par Nguyen [Ngu14]. Le montage est présenté sur la figure 1.19. La méthode repose sur l'étude du gonflage et permet d'identifier les propriétés mécaniques en fonction des variations de longueur et de rayon, et éventuellement de la rotation de section si les fibres ne sont pas orientées selon l'axe de la poutre, observées lors de la pressurisation. C'est un essai de traction biaxiale, qui permet en plus l'identification du module de cisaillement. La méthode repose sur une répétition de mesure sur une même géométrie mais en faisant varier l'orientation des fibres du tissu.

Son principal avantage est l'uniformité des contraintes et l'inconvénient est la présence d'une couture (ou soudure) nécessaire à la fermeture du tube. Cet essai est en cours de développement.

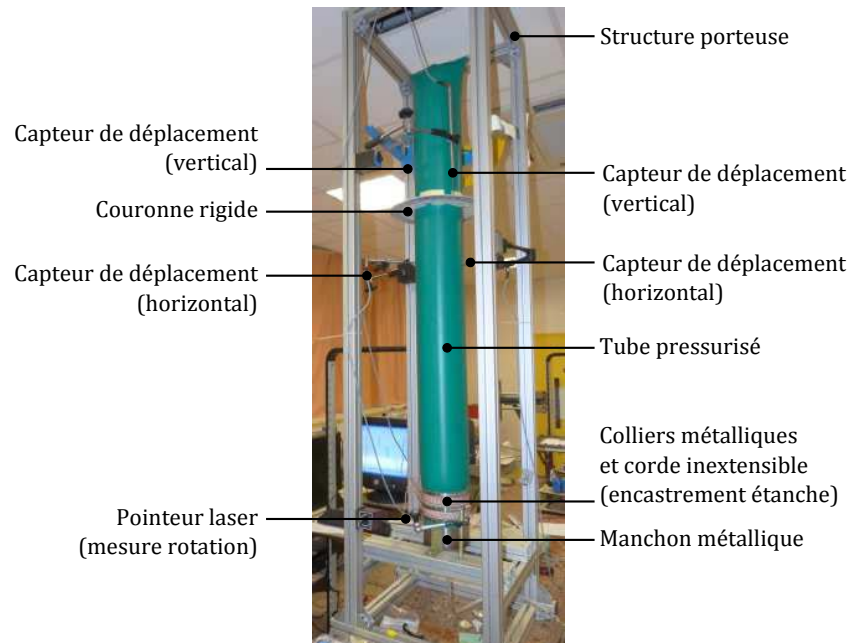


Fig. 1.19 – Essai de caractérisation sur un tube pressurisé [Ngu14].

1.2.5 Résultats d'essais de caractérisation sur des textiles

On présente dans ce paragraphe des exemples de propriétés mécaniques identifiées lors d'essais de caractérisation. Cependant, la littérature montre que les résultats obtenus sont très dépendants de la méthode utilisée [CPL⁺15]. Il existe cependant des recommandations, notamment le guide de *Biger et al.*[B⁺97] pour la France, pour la caractérisation des textiles dans le cadre du dimensionnement d'une structure permanente à couverture textile. Le tableau 1.2 présente des résultats d'essais de caractérisation sur des tissus afin d'avoir un ordre de grandeur pour les tissus usuels. Les exemples choisis montrent la difficulté d'identifier toutes les propriétés par un seul essai. On notera que les modules de Young et de cisaillement sont exprimés en kN/m. L'épaisseur d'un tissu est difficile à caractériser, il est donc d'usage de travailler avec le produit des modules avec l'épaisseur H du tissu ou modules de nappe $E_{\ell}H$, E_tH et $G_{\ell t}H$, où ℓ et t sont les directions d'orthotropie.

Tab. 1.2 – Exemples de propriétés mécaniques caractérisées sur des tissus

Référence	Tissu	Type d'essai	$E_{\ell}H$ (kN/m)	E_tH (kN/m)	$G_{\ell t}H$ (kN/m)
[CPL ⁺ 15]	Sioen T2107	Biaxial	819,1	651,4	-
[USS15]	Polyester/PVC	Biaxial	806	271	-
[USS15]	Verre/PTFE	Biaxial	1417	317	-
[Ngu14]	Ferrari F302	Gonflage	215	216	5,42
[CBG ⁺ 14]	SCC200	Cadre Photo	-	-	25,7
[CBG ⁺ 14]	CMX220	Cadre Photo	-	-	29,6
[CBG ⁺ 14]	FGT1000	Cadre Photo	-	-	120,5

L'utilisation du produit des modules avec l'épaisseur du tissu est usuelle dans la communauté de la mécanique du textile et est avantageuse dans une approche de type résistance des matériaux (approche

proposée par la suite). Ces approches ne font pas apparaître les modules seuls mais des produits entre ces derniers et la section droite S ou le moment quadratique I . Pour une poutre gonflable de section circulaire de rayon R et d'épaisseur H , la section S est égale à $2\pi RH$ et le moment quadratique I vaut $\pi R^3 H$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_\ell S &= E_\ell H \times 2\pi R \\ E_\ell I &= E_\ell H \pi R^3 \end{aligned}$$

(1.3)

On s'affranchit alors de l'épaisseur en utilisant les modules de nappe.

1.3 Contexte

Tab. 1.3 – Panorama des coefficients de sécurité à appliquer lors du dimensionnement d'une structure membranaire [EDG04]

Guide / Recommandations	Coefficients de sécurité	Caractéristiques du calcul
IASS [IAS86]	4.2 - 6.0 (chaîne)	ondulation du tissu et fiabilité précision du calcul
	5.0 - 7.0 (trame)	incertitude sur le chargement dégradations environnementales circonstances imprévues
France [SEB09]	5.0 - 7.0	qualité du tissu taille de la structure Pollution (dégradations environnementales)
Allemagne / Italie (pratique)	4.9 - 6.4 (charge permanente)	type de chargement caractéristiques de la surface conditions de liaison
	2.9 - 3.2 (Rafales de vent)	
Japon [MSA90]	4.4 - 5.1 (Accumulation de neige)	
	8/6 (charge permanente)	
ASCE [ASC02]	4/3 (charge temporaire)	
	3.3 - 4.2	réduction de force chargements combinés cycle de vie

Face à l'essor de l'architecture textile, le CEN-TC-250 (Comité Européen de Normalisation - Comité Technique 250) a créé en 2010 un groupe de travail, le WG5 (Working Group 5 - Groupe de Travail 5) dont la mission est l'écriture d'un document technique pouvant servir de base à la création d'un Eurocode relatif aux structures membranaires à l'horizon 2024. L'écriture d'un Eurocode est un processus long, la première étape a été franchie avec la publication en 2015 d'un SaP-Report (Scientific and Policy Report) [S⁺15] . Ce document présente, entre autre, un état de l'art des recommandations, règles ou pratiques de dimensionnement existantes en Europe et propose des pistes pour l'harmonisation qui pourrait être adoptées dans un futur Eurocode. Les étapes suivantes pourraient être franchies en 2019 avec la conversion du SaP-Report en CEN TS (CEN Technical Specification) puis une éventuelle conversion en Eurocode après une période d'utilisation et de révision de 2 ans. Parallèlement à ces travaux, une action COST (TU1303 : Novel Structural Skins) a débuté en 2013. Son objectif est l'amélioration de la fiabilité et de l'efficacité des textiles par de nouveaux designs et matériaux.

1.3.1 Guide et recommandations pour les structures textiles

Les guides et recommandations existants sont propres au pays d'édition. Les différences entre chacune des recommandations est évidente au travers du coefficient de sécurité appliqué sur le calcul d'une structure membranaire [Zha10]. Les règles appliquées sont synthétisées dans le tableau 1.3. Ce panorama met en évidence les différences propres à chaque organisation, tant en terme de coefficient de sécurité qu'en termes de critères déterminants au calcul et révèle un besoin d'uniformisation en amont de la rédaction du SaP-Report [S⁺15]. Il existe pour la France, un guide publié une première fois en 1997 [B⁺97] et réédité puis complété depuis [SEB09] pour le dimensionnement des structures à couverture textile permanente.

1.3.2 Eurocodes

Les Eurocodes sont les normes européennes de conception et de dimensionnement des bâtiments et des structures de génie civil. Leur but est d'harmoniser les principes et règles de dimensionnement à travers l'Union Européenne afin d'assurer le libre accès des entreprises concernées aux marchés de tous les États membres. Les Eurocodes sont développés par le Comité Européen de Normalisation (CEN). La publication des Eurocodes en France est assurée par l'Agence Française de Normalisation (AFNOR). Ces derniers sont regroupés en dix familles reliées entre elles (Fig. 1.20) :

- Eurocode 0 - Base de calcul des structures (EN 1990).
- Eurocode 1 - Actions sur les structures (EN 1991).
- Eurocode 2 - Calcul des structures en béton (EN 1992).
- Eurocode 3 - Calcul des structures en acier (EN 1993).
- Eurocode 4 - Calcul des structures mixtes acier-béton (EN 1994).
- Eurocode 5 - Conception et calcul des structures en bois (EN 1995).
- Eurocode 6 - Calcul des ouvrages en maçonnerie (EN 1996).
- Eurocode 7 - Calcul géotechnique (EN 1997).
- Eurocode 8 - Calcul des structures pour leur résistance aux séismes (EN 1998).
- Eurocode 9 - Calcul des structures en aluminium (EN 1999).

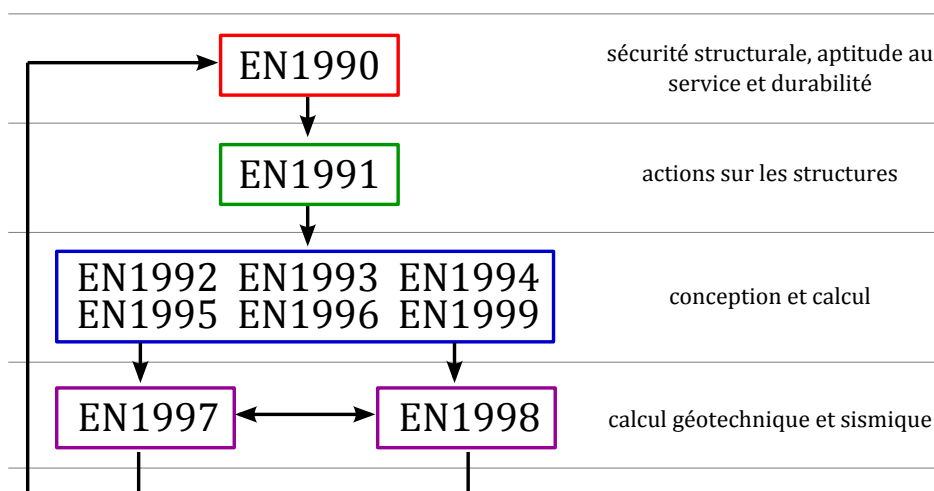


Fig. 1.20 – Structure et liens entre les différents Eurocodes [CB].

Les Eurocodes sont organisés en principes, qui définissent des objectifs de comportement généraux permettant de respecter les exigences essentielles et de clauses d'application. Ces dernières sont des méthodes

généralement acceptées pour respecter les exigences essentielles. Les objectifs techniques des Eurocodes sont les suivants [EC199] :

- spécifier les exigences pour la fiabilité des structures (états limites et situations de projet) ;
- donner les modèles de défaillance et les règles correspondantes qui, pour des conditions données ou implicites de site, de projet, d'exécution et de maintenance, permettent de vérifier la conformité d'un projet aux exigences spécifiées pour la fiabilité ;
- détailler les conditions auxquelles les modèles et les critères de défaillance sont sensibles et dont le respect doit être maîtrisé (hypothèses) ;
- proposer des niveaux d'exigence pour la fiabilité (valeurs numériques des éléments du format de fiabilité).

Les Eurocodes sont nés dans le cadre de la construction européenne. La création du marché commun a offert la possibilité aux entreprises des pays membres de répondre à un appel d'offre dans un autre pays membre. La mise en application de cette politique s'avère difficile du fait de la diversité des règles de calcul en vigueur dans les différents États membres de la Communauté. Ainsi en 1975, la Commission vote le lancement d'un programme d'actions visant à harmoniser les spécifications techniques dans le domaine de la construction [CB]. Ces règles devaient servir d'alternative aux règles nationales. Équivalentes dans un premier temps, elles aspirent à les remplacer à terme. Les Eurocodes, dans leur première version ont été édités entre 1992 et 1998. Les États membres conservent de larges choix de paramètres, de nombreuses valeurs sont simplement suggérées par le texte. Par ailleurs, le texte a été édité dans chaque pays membre accompagné d'un Document d'Application Nationale (DAN) permettant d'amender plus ou moins largement son contenu, rendant l'harmonisation improbable. Devant l'état très imparfait de la convergence des spécificités techniques, la Commission a fixé des règles beaucoup plus strictes pour l'établissement des normes européennes finales. Les principes et méthodes de conception sont ainsi harmonisés. De plus, le contenu des annexes nationales est strictement encadré, confinant les choix nationaux aux niveaux de sécurité et de fonctionnalité [CB]. Les Eurocodes instaurent plusieurs exigences. Le premier principe codifie le comportement de la structure et ce même dans le dernier état de sa vie (EN 1990) :

Une structure doit être conçue et réalisée de sorte que, pendant sa durée de vie escomptée avec des niveaux de fiabilité appropriés et de façon économique :

- elle résiste à toutes les actions et influences susceptibles d'intervenir pendant son exécution et son utilisation ;
- elle reste adaptée à l'usage pour lequel elle a été conçue.

La règle est précisée par un autre principe (EN 1990) :

Une structure doit être conçue et exécutée de telle sorte qu'elle ne soit pas endommagée par des événements tels que :

- une explosion ;
 - un choc ;
 - les conséquences d'erreurs humaines ;
- de façon disproportionnée par rapport à la cause initiale.

Ce principe impose au concepteur de lourdes responsabilités par rapport au comportement de la structure lors de sa durée de vie prévue. Dans ce contexte, l'Eurocode EN 1990 définit les notions auxquelles se rapportent ces règles fondamentales.

- La **fiabilité** d'une structure ou d'un élément structural est sa capacité à satisfaire les exigences spécifiées, y compris la durée d'utilisation de projet, pour lesquels il (ou elle) a été conçu(e). La fiabilité s'exprime habituellement en terme de probabilité.
- La **durée d'utilisation de projet** est la durée pendant laquelle une structure, ou une partie de cette structure, doit pouvoir être utilisée comme prévu, en étant l'objet de maintenances planifiées, mais sans qu'il soit nécessaire d'effectuer des réparations majeures.

Les Eurocodes se traduisent dans les bureaux d'études par la définition d'états-limites :

Un **état limite de service** (ELS) est associé à des états de la structure, ou de certaines de ses parties, lui causant des dommages limités ou rendant son usage impossible dans le cadre des exigences définies lors de son projet (exigences de fonctionnement, de confort pour les passagers ou d'aspect).

Un **état limite ultime** (ELU) est associé à une rupture entraînant l'effondrement total ou partiel de la structure considérée, et mettant en cause la sécurité des personnes.

1.4 Enjeux et motivations

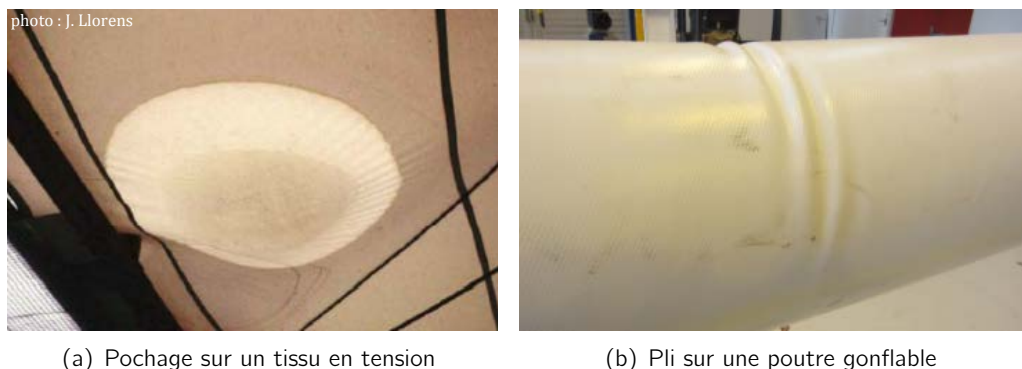


Fig. 1.21 – Exemple d'états-limites de service.

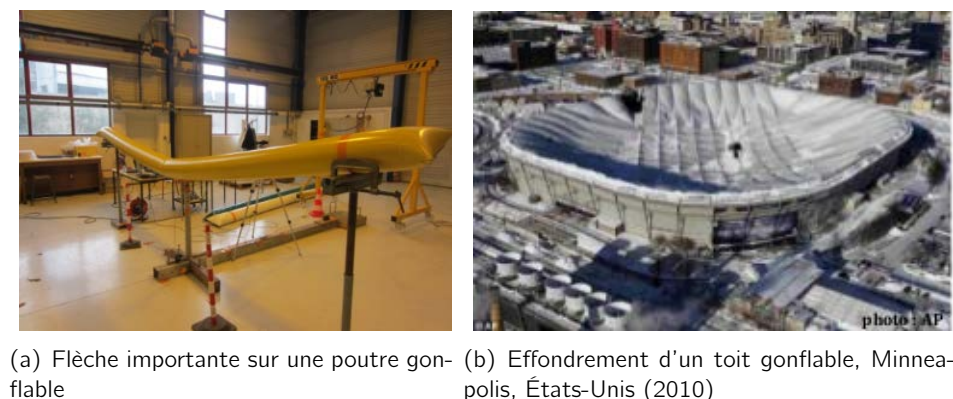


Fig. 1.22 – Exemple d'états-limites ultimes.

L'enjeu de ce travail réside dans la formulation de ces états-limites. La définition d'un état limite de service est large et plusieurs phénomènes peuvent être considérés, la figure 1.21 illustre ces phénomènes :

- un déplacement maximal à ne pas dépasser,
- présence de zones de pochage,

- apparition d'un pli.

La définition de l'état limite ultime est plus stricte et correspond aux cas suivants, illustrés en partie sur la figure 1.22 :

- un déplacement trop important,
- un effondrement,
- une déchirure.

Les modèles actuels permettent l'expression des états limites de service mais ne permettent pas la formulation de l'état limite ultime. Dans le cadre de ce travail, on se focalisera sur des critères exprimés en déplacements et en charge de ruine.

Chapitre 2

Enrichissement et développement de modèles de poutre gonflable

Résumé : Ce chapitre est dédié aux modèles de comportement de poutres gonflables. Le comportement d'une poutre gonflable se décompose en deux parties : une partie linéaire et une partie non-linéaire. La partie linéaire du comportement s'achève avec l'apparition d'un pli. Cette apparition d'un pli est caractéristique de la charge de plissage. Au delà de cette charge, le comportement est non-linéaire jusqu'à atteindre une charge maximale appelée charge de ruine. L'état de l'art mené sur les modèles existants montre que la première partie du comportement est bien maîtrisée ainsi que la prévision de la charge de plissage. Cependant, très peu de modèles sont disponibles pour modéliser le comportement au delà de la charge de plissage et particulièrement pour prévoir la charge de ruine. Le travail réalisé dans ce chapitre repose sur cette constatation. Une première partie du travail consiste à exprimer la charge de ruine pour une poutre gonflable de section circulaire. Cette démarche s'appuie sur une approche de type théorie des poutres qui permet d'exprimer la contrainte dans une section pliée de la poutre. L'étude de la contrainte permet d'analyser le moment de flexion dans cette même section dont on montre qu'il existe une valeur maximum correspondant à la charge de ruine. Les résultats sont comparés à une étude numérique et à des résultats expérimentaux. Une seconde partie du travail consiste à proposer un modèle de déplacement pour une poutre gonflable affectée par un pli. L'approche est basée sur une utilisation des équations d'équilibre linéarisées pour une poutre gonflable obtenues à partir d'une formulation lagrangienne totale puis linéarisée. Ces équations sont résolues en modifiant la section et le moment quadratique de la section pour considérer le pli. Cette méthode permet d'obtenir une expression analytique du déplacement post-plissage. Un modèle numérique est également proposé en modifiant l'expression de la section et du moment quadratique dans un élément fini de poutre gonflable à deux nœuds. Les résultats des deux modèles de déplacement développés sont comparés à une étude expérimentale et à un calcul éléments-finis en 3D.

2.1	Introduction	34
2.2	Modèles de poutres gonflables : état de l'art	35
2.2.1	Définition de l'état initial	35
2.2.2	Modèles analytiques de poutre gonflable	36
2.2.3	Formules analytiques de déplacement pour les poutres gonflables	37
	Application : poutre biappuyée soumise à une charge concentrée en son milieu	40
2.2.4	Modèles éléments finis pour les poutres gonflables	41
2.2.5	Élément fini de poutre gonflable à deux nœuds	42
2.2.6	Cas de la dynamique	44
2.2.7	Charge de pli - Charge de ruine	45
2.2.8	Conclusion	46
2.3	Charge de ruine pour une poutre gonflable	47
2.3.1	Contraintes dues à la mise en pression	47
2.3.2	État de la contrainte pour une poutre gonflable en flexion	48
2.3.3	Expression de la rotule pneumatique	51
2.3.4	Charge de ruine pour une poutre gonflable	52
2.4	Expression analytique du déplacement post-plissage	53
2.4.1	Notion de zone détendue	53
2.4.2	Poutre droite fictive équivalente	54
2.4.3	Intégration des équations d'équilibre	56
	Intégration Linéaire-Linéaire	58
	Intégration Quadratique-Linéaire	60
	Intégration Quadratique-Quadratique	62
2.5	Étude numérique d'une poutre en flexion	64
2.5.1	Description du problème	64
2.5.2	Modélisation Numérique	65
2.5.3	Résultats	66
	Détermination numérique de la charge de ruine	66
	Détermination numérique de l'angle maximal $\phi_0 = \pi/2$ de propagation du pli	68
	Évolution de la contrainte dans la section pliée	68
	Forme de la section active - absence d'ovalisation	69
	Étude de la zone détendue	71
	Étude du déplacement	71
2.5.4	Comparaison des résultats du calcul numérique 3D et du modèle analytique sur le calcul du déplacement	72
2.6	Adaptation de la rigidité de l'élément fini poutre gonflable	73
2.6.1	Prise en compte de l'orthotropie	73
2.6.2	Algorithme	74
2.6.3	Comparaison des résultats avec le calcul numérique 3D et le modèle analytique	75
2.7	Étude expérimentale d'une poutre gonflable en flexion 3 points	77
2.7.1	Présentation et objectifs de l'essai	77
2.7.2	Fabrication des poutres	77
2.7.3	Montage et appareillage	79
	Réalisation des appuis	79
	Application de la force	80
	Mesures et protocole	81

2.7.4	Résultats	82
2.7.5	Conclusion	83
2.8	Utilisation de l'élément fini sur un problème plus complexe	84
2.8.1	Présentation du cas-test	84
2.8.2	Construction des modèles	84
2.8.3	Résultats	86
	Étude de la pré-contrainte due à la mise sous pression avec le modèle 3D	86
	Comparaison des modèles	86
2.9	Conclusion	90

Notations Principales

- Systèmes de coordonnées :

$\mathcal{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	Base globale cartésienne
(X, Y, Z)	Coordonnées cartésiennes
(r, ϕ)	Coordonnées cylindriques

- Configurations :

$\Omega_\emptyset$	Configuration naturelle
Ω_0	Configuration initiale (ou pressurisée)
Ω	Configuration actuelle (ou déformée)

- Géométrie :

Relative à configuration initiale $\Omega_\emptyset$

$L_\emptyset$	Longueur de la poutre
$R_\emptyset$	Rayon de la poutre
$H_\emptyset$	Épaisseur du tissu

Relative à configuration initiale Ω_0

L	Longueur de la poutre
R	Rayon de la poutre
H	Épaisseur du tissu
S	Section droite
I	Moment quadratique
$\tilde{R}$	Rayon fictif pour la modélisation du pli
$\tilde{S}$	Section droite fictive pour la modélisation du pli
$\tilde{I}$	Moment quadratique fictif pour la modélisation du pli
ϕ_0	Angle d'ouverture du pli
δ	Demi-longueur de la zone détendue

- Cinématique :

Relative à la transformation de la configuration naturelle $\Omega_\emptyset$ à la configuration initiale Ω_0

φ_Φ	Fonction de la transformation
$\varphi_{\mathbf{F}}$	Tenseur du gradient de la transformation
$\varphi_{\mathbf{E}}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Relative à la transformation de la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle Ω

Φ	Fonction de la transformation
$\mathbf{F}$	Tenseur du gradient de la transformation
$\mathbf{E}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\mathbf{X}$	Vecteur position par rapport à la configuration initiale
$\mathbf{U}$	Champ de déplacement
(U, V, W)	Composantes du champ de déplacement dans la base cartésienne
θ	Rotation de la section par rapport à l'axe $\vec{e}_z$
$\mathbf{V}^*$	Champ de vitesse virtuel
θ^*	Rotation virtuelle de la section par rapport à l'axe $\vec{e}_z$

- Contraintes :

Π	Tenseur des contraintes de Piolat-Kirchhoff de première espèce
Σ	Tenseur des contraintes de Piolat-Kirchhoff de seconde espèce
σ	Tenseur des contraintes de Cauchy
$N, M, T, M^{(2)}$	Contraintes intégrées dans la section droite
$N_0, M_0, T_0, M_0^{(2)}$	Contraintes intégrées initiales dans la section droite

- Chargement :

F	Force concentrée
X, Y, Z	Composantes de la force concentrée
p	Pression de gonflage
$P = p\pi R^2$	Résultante de pression
Γ	Composante du couple concentré
p_x, p_y, p_z	Composantes des chargements répartis
μ	Composante du couple distribué

- Propriétés mécaniques du matériau :

Relative à configuration initiale $\Omega_\emptyset$	
${}^\emptyset E_\ell$	Module de Young longitudinal
${}^\emptyset E_t$	Module de Young transverse
${}^\emptyset G_{\ell t}$	Module de cisaillement
${}^\emptyset \nu_{\ell t}$	Coefficient de Poisson

Relative à configuration initiale Ω_0	
E_ℓ	Module de Young longitudinal
E_t	Module de Young transverse
$G_{\ell t}$	Module de cisaillement
$\nu_{\ell t}$	Coefficient de Poisson

- Élément fini de poutre gonflable :

X	Abscisse
ξ	Abscisse sur l'élément de référence
L_0	Longueur de l'élément
$\{U\}$	Vecteur des déplacements
U, V, θ	Déplacements nodaux
$\{U\}^e$	Vecteur des déplacements élémentaires
$N_{V_1}, N_{\theta_1}, N_{V_2}, N_{\theta_2}$	Fonctions de forme
$[K]$	Matrice de rigidité
$[K]^e$	Matrice de rigidité élémentaire

- Coefficients :

k	Coefficient de section réduite
k_x, k_θ	Coefficients de variation géométrique lors de la pressurisation

2.1 Introduction

Le comportement d'une poutre gonflable est complexe et se décompose en plusieurs étapes décrites sur la figure 2.1. Cette figure correspond à l'étude d'une poutre biappuyée soumise à une charge ponctuelle en son milieu. Une courbe expérimentale est présentée par des points sur la droite de la figure. La partie linéaire est modélisée par une droite sur cette même courbe. La partie gauche illustre les différents états successifs d'une poutre gonflable au cours du chargement par une représentation numérique en trois dimensions. La mise sous pression, étape (0) sur la figure 2.1, correspond au passage de la configuration naturelle (*i.e.* avec une pression infinitésimale, maillage rouge) à la configuration initiale (*i.e.* la poutre est pressurisée, maillage gris). La pressurisation apporte à la poutre sa rigidité. Lors de l'application d'un chargement de flexion, la poutre présente un comportement quasi-linéaire (étape (1) sur la figure 2.1) jusqu'à l'apparition du pli. Elle atteint alors la charge de plissage F^{pli} (marquée (2) sur la figure 2.1), qui se traduit par une perte de linéarité sur la courbe force-déplacement. Si le chargement est augmenté davantage, le comportement de la poutre devient non-linéaire (étape (3) sur la figure 2.1) et la courbe force-déplacement tend vers une valeur maximale pour la charge qui correspond à la ruine de la poutre (marquée (4) sur la figure 2.1). La charge de ruine F^{ruine} est alors atteinte, au delà de ce point la force demeure quasiment constante ou décroît tandis que la flèche continue d'augmenter.

La partie linéaire (1) du comportement est bien connue dans la littérature tout comme la charge de plissage (2). La partie non-linéaire (3) du comportement et l'expression de la charge de ruine (4) ont fait l'objet de quelques travaux dont les résultats diffèrent d'une étude à l'autre.

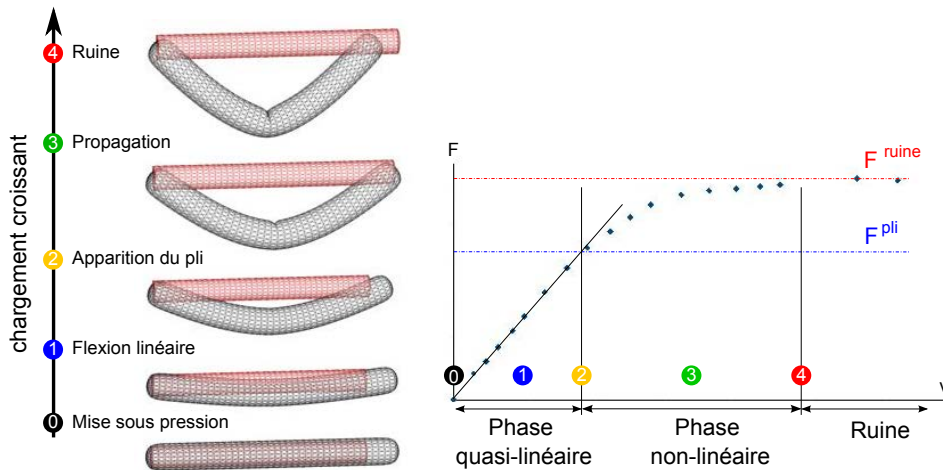


Fig. 2.1 – Présentation des différentes phases de comportement d'une poutre gonflable en réponse à une sollicitation mécanique.

Le verrou scientifique à lever dans ce chapitre est la compréhension et la modélisation de la phase non-linéaire (3) de la courbe force-déplacement (fig. 2.1) ainsi que la détermination de la charge de ruine (4) dans le but de formuler les états-limites. La première partie de ce travail consiste en un état de l'art des modèles existants pour l'étude des poutres gonflables. La seconde partie est focalisée sur l'expression de la charge de ruine. Les hypothèses posées pour effectuer les développements analytiques sont vérifiées par l'utilisation d'un code numérique sur une poutre modélisée en 3D par des éléments finis membrane. Les résultats du modèle et du calcul numérique sont comparés à des données expérimentales. La troisième partie est relative à l'élaboration d'un modèle de déplacement post-plissage par deux approches : la première est une approche analytique basée sur l'étude de la contrainte et la résolution d'équation d'équilibre en considérant l'influence du pli et la seconde propose d'utiliser un élément fini de poutre gonflable en adaptant la matrice de rigidité pour prendre en compte l'effet du pli. Les résultats de ces deux modèles de déplacement sont comparés aux résultats expérimentaux puis au calcul élément fini réalisé en 3D avec des éléments membrane.

2.2 Modèles de poutres gonflables : état de l'art

2.2.1 Définition de l'état initial

Il est important de distinguer la configuration initiale de la configuration naturelle lorsque l'étude d'une poutre gonflable est entreprise. Un temps cinématique t est introduit pour distinguer les configurations successives d'une poutre gonflable. Elles sont au nombre de 3 : l'instant t_ϕ correspond à la configuration naturelle Ω_ϕ de la poutre, l'instant t_0 correspond à la configuration initiale Ω_0 et l'instant t correspond à la configuration actuelle Ω . Les 3 configurations sont représentées sur la figure 2.2. La position d'un point de la paroi est notée ${}^\phi X$ en configuration naturelle Ω_ϕ , ce même point occupe la position X en configuration initiale Ω_0 et la position x en configuration actuelle Ω .

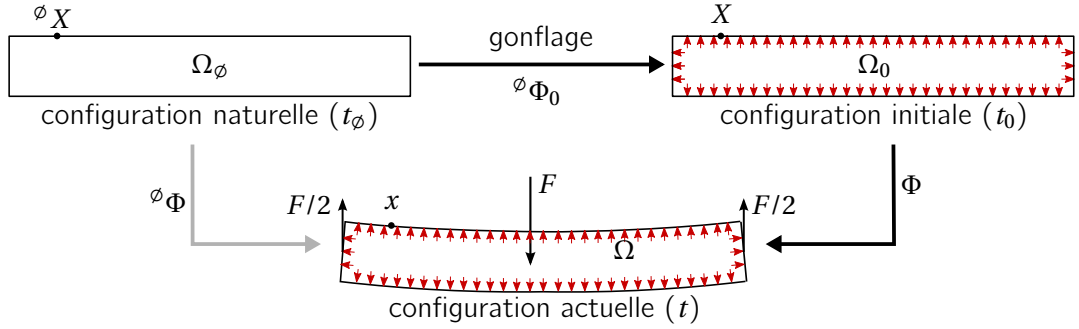


Fig. 2.2 – Configuration naturelle, configuration initiale et configuration actuelle.

Le passage de la configuration naturelle Ω_ϕ à la configuration initiale Ω_0 est décrit par la transformation ${}^\phi\Phi_0$ telle que :

$$X = {}^\phi\Phi_0({}^\phi X_\phi) \quad (2.1)$$

Cette transformation particulière fait l'objet de la thèse de Nguyen [Ngu14] qui montre que le gonflage a pour conséquences des variations non-linéaires géométriques (*i.e.* variation de longueur et de rayon et éventuellement de rotation de section suivant l'orientation des fibres) et matérielles (*i.e.* variations des modules de Young et de cisaillement si on utilise un matériau orthotrope) lors du passage de la configuration naturelle à la configuration initiale. Soient R_ϕ et L_ϕ le rayon et la longueur de la poutre en configuration naturelle et R_0 et L_0 le rayon et la longueur de la poutre en configuration initiale. On trouve dans la littérature les relations entre les dimensions en configuration naturelle et en configuration initiale dans le cas d'un tube pressurisé orthotrope équilibré en petites transformations [LW06]

$$R_0 = R_\phi + \frac{pR_\phi^2}{2E_t H}(2 - \nu_{t\ell}) \quad (2.2)$$

et

$$L_0 = L_\phi + \frac{pR_\phi L_\phi}{2E_\ell H}(2 - \nu_{\ell t}) \quad (2.3)$$

Ces équations sont valables si les fibres sont orientées selon l'axe du tube, cas considéré tout au long de cette étude. Lors de l'application de fortes pressions, les variations de longueur et de rayon ne sont plus linéaires par rapport à la pression de gonflage. [Ngu14] donne la théorie permettant d'établir les valeurs de R_0 et L_0 dans tous les cas. [Ngu14] montre qu'une distinction doit être faite entre les propriétés mécaniques du tissu en configuration naturelle (${}^\phi E_\ell H_\phi$, ${}^\phi E_t H_\phi$, ${}^\phi G_{\ell t} H_\phi$) et en configuration initiale ($E_\ell H$, $E_t H$, $G_{\ell t} H$). Les propriétés mécaniques de chacune des configurations dépendent de deux coefficients :

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{L_0}{L_\phi} \\ k_\theta &= \frac{R_0}{R_\phi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

les termes k_x et k_θ s'obtiennent à partir des équations (2.3) et (2.2) :

$$\begin{aligned} k_x &= 1 + \frac{pR_\phi}{2^\phi E_\ell H_\phi} (2 - \nu_{\ell t}) \\ k_\theta &= 1 + \frac{pR_\phi}{2E_t H_\phi} (2 - \nu_{t\ell}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

On peut remarquer que la longueur en configuration naturelle L_ϕ n'intervient pas dans l'expression des coefficients k_x et k_θ . En notant H l'épaisseur du tissu, les propriétés mécaniques du tube en configuration initiale se calculent à partir des propriétés mécaniques en configuration naturelle (*i.e.* les propriétés mécaniques du tissu) par :

$$\begin{aligned} E_\ell H &= {}^\phi E_\ell H_\phi \frac{k_x^3}{k_\theta} \\ E_t H &= {}^\phi E_t H_\phi \frac{k_\theta^3}{k_x} \\ G_{\ell t} H &= k_x k_\theta {}^\phi G_{\ell t} H_\phi \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ce résultat est important puisque ces valeurs doivent être considérées dans les modèles de flexion. Les modèles présentés par la suite s'intéressent à la transformation de la configuration initiale (à l'instant t_0) à la configuration déformée (ou actuelle) Ω à l'instant t . Cette transformation s'écrit :

$$x = \Phi(X, t) \quad (2.7)$$

La transformation de la configuration naturelle à la configuration actuelle dans le formalisme adopté s'écrit :

$$x = {}^\phi \Phi({}^\phi X, t) \quad (2.8)$$

2.2.2 Modèles analytiques de poutre gonflable

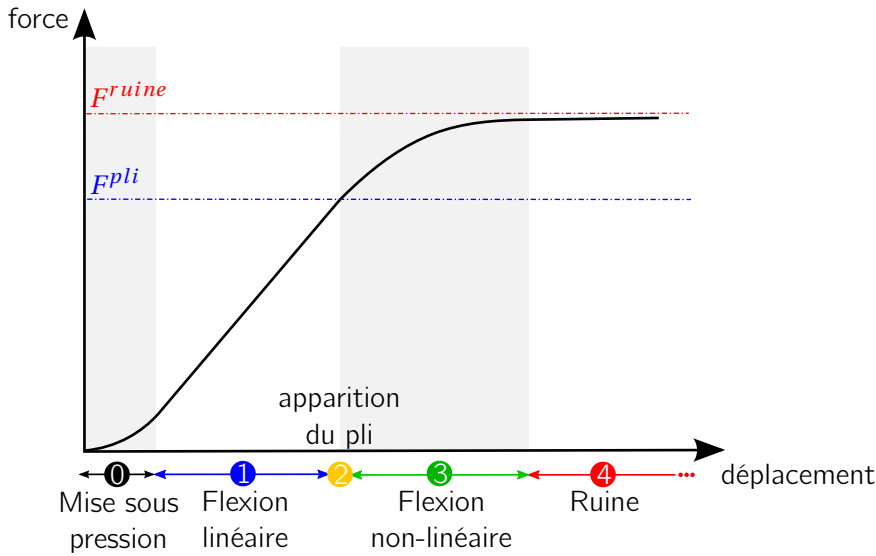


Fig. 2.3 – Courbe théorique représentant le comportement force-déplacement classique pour une poutre gonflable.

La partie quasi-linéaire de la courbe force-déplacement (fig. 2.3) est la plus étudiée dans la littérature. Les premiers modèles développés relatifs au comportement d'une poutre gonflable sont issus de l'étude menée par Comer et Levy [CL63] sur une poutre console pressurisée. Dans ce travail, une relation force-déplacement est obtenue en considérant un matériau isotrope élastique linéaire et une cinématique de poutre d'Euler-Bernoulli. Les développements de Comer et Levy sont repris plus tard par Webber [Web82] qui introduit une combinaison flexion-torsion dans l'étude de la flèche, du plissage et de la ruine. Ils sont aussi affinés par Main et al. [MPS94] qui considèrent des aspects locaux au niveau du pli, et proposent une comparaison théorie-

expérience sur des poutres consoles pressurisées. Dans une seconde étude, ces mêmes auteurs étendent la théorie [CL63] en modélisant le tissu par un matériau orthotrope [MPS95] et affinent ainsi les résultats de Comer et Levy. La limite de ces modèles est d'une part l'absence de la pression de gonflage (qui apporte à la poutre sa rigidité) dans l'expression de la flèche et d'autre part par la non prise en compte du cisaillement qui peut-être important pour les parois fines. La prise en compte du cisaillement passe par l'utilisation d'une cinématique de Timoshenko.

L'apport de Fichter [Fic66] en ce sens est important. Dans l'approche qu'il propose, Fichter considère une poutre pressurisée isotrope dont il minimise l'énergie potentielle totale (la pression de gonflage, supposée constante durant la déformation, intervient dans la variation d'énergie potentielle de l'air enfermé due au changement de volume). La résolution du problème mène à des équations d'équilibres qui, après linéarisation, aboutissent à une expression analytique de la flèche dans laquelle la pression de gonflage apparaît explicitement. En écrivant l'équilibre d'un élément de poutre en configuration déformée et en utilisant une cinématique de Timoshenko, Wielgosz et Thomas obtiennent des formules analytiques pour la flèche et la rotation de section dans le cas de poutres [TW04] et de panneaux pressurisés [WT02], pour un matériau isotrope. L'écriture des équations d'équilibre sur la configuration actuelle (donc déformée) permet la prise en compte de la pression de gonflage. Contrairement à l'approche proposée par Fichter [Fic66], la pression est interprétée ici comme une force suiveuse et aboutit à des équations traduisant le renforcement de la rigidité dû à la mise sous pression. La théorie de Fichter [Fic66] est ensuite enrichie par les développements de Le Van et Wielgosz [LW05] qui adoptent une formulation lagrangienne totale. L'écriture du Principe des Travaux Virtuels en grandes transformations permet de considérer les termes non-linéaires et l'action de la pression de gonflage dans les équations d'équilibre. Ces dernières sont ensuite linéarisées pour déterminer les expressions de la flèche et de la rotation de section pour une poutre pressurisée isotrope. La prise en compte de l'orthotropie dans les formules analytiques de poutre est plus récente. Apedo et al. [ARJ⁺09] puis Nguyen et al. [NRM⁺12] ont travaillé sur des modèles écrits en grandes transformations puis linéarisés pour le cas des grands déplacements et petites rotations. Récemment, comme cela a été vu en 2.2.1, Nguyen *et al.* [Ngu14][NTL14] ont complété les résultats de Le Van et Wielgosz [LW05] en tenant compte du comportement orthotrope des textiles puis en considérant les effets du gonflage sur la géométrie et sur les matériaux. Ces derniers travaux proposent également une méthode de caractérisation des propriétés mécaniques d'une poutre gonflable. Des géométries plus complexes sont également proposées par Wang et al. [WDT12] qui présentent une étude analytique puis expérimentale sur un cône gonflable jusqu'à l'apparition du pli. Les déformées analytiques d'une arche gonflable soumise à des chargements neige et vent sont calculées par Plaut et al. [PGKH00] en résolvant l'équilibre de coques.

2.2.3 Formules analytiques de déplacement pour les poutres gonflables

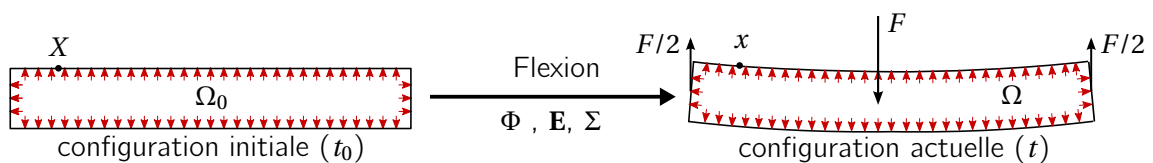


Fig. 2.4 – configuration initiale et configuration actuelle.

On s'intéresse ici à la formulation du problème de poutre gonflable. On a vu au paragraphe 2.2.1 que la mise sous pression (*i.e.* le passage de la configuration naturelle à la configuration initiale) aboutit à des variations géométriques et matérielles de la poutre. On travaille à présent sur la transformation permettant le passage de la configuration initiale à la configuration déformée. Les deux configurations sont rappelées sur la figure 2.4. Dans la configuration actuelle, la longueur L et le rayon R de la poutre sont calculés à partir

des dimensions L_ϕ et R_ϕ dans la configuration naturelle avec les équations (2.4) et (2.5). Le passage entre les deux configurations est représenté par la transformation Φ . Le problème est mis en équation à partir du principe des travaux virtuels (PTV) publié dans [LW05] et amélioré dans [Ngu14] en prenant en compte l'orthotropie du tissu.

Une formulation lagrangienne totale est utilisée. Les variables sont définies relativement à la configuration initiale Ω_0 : $\mathbf{F}$ est le tenseur du gradient des transformations, $\mathbf{\Pi}$ et $\mathbf{\Sigma}$ sont respectivement les tenseurs de Piola-Kirchhoff de première et seconde espèce, $\rho_0 \mathbf{f}_0$ la force volumique. On utilise un champ de vitesse virtuel $\mathbf{V}^*$. Les équations d'équilibre sont déduites par l'application du principe des puissances virtuelles défini par :

$$\forall \mathbf{V}^*, \quad - \int_{\Omega_0} (\mathbf{F}\mathbf{\Sigma})^T : \mathbf{grad} \mathbf{V}^* d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{f}_0 d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T}\mathbf{V}^* dS_0 = 0 \quad (2.9)$$

où $\partial\Omega_0$ est la frontière du domaine Ω_0 et $\mathbf{T} = \mathbf{\Pi}\mathbf{n}$ est le vecteur des contraintes nominales. Le terme $\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T}\mathbf{V}^* dS_0$ est la puissance virtuelle des forces surfaciques, qui inclut la contribution de la pression interne qui s'écrit $\int_{S_p} \mathbf{V}^* p \mathbf{n} dS_p$. S_p correspond à la surface d'application de la pression interne p et $\mathbf{n}$ est la normale à la surface dans la configuration actuelle, elle suit donc la surface lors du déplacement. La pression est alors une sollicitation suivieuse. Pour l'étude de la flexion, on considère une cinématique de Timoshenko pour laquelle la section droite reste plane au cours de la transformation mais ne reste pas orthogonale à la ligne neutre dans la configuration actuelle.

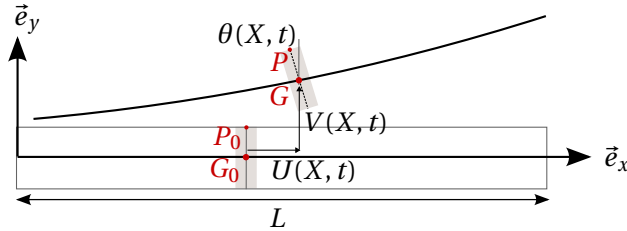


Fig. 2.5 – Cinématique pour l'application du PTV.

La figure 2.5 présente la cinématique choisie dans ce modèle. L'abscisse du centre de la section courante sur la configuration initiale G_0 est notée X . Le déplacement de G_0 est noté $\mathbf{U}(X) = U(X)\mathbf{e}_x + V(X)\mathbf{e}_y$ et la rotation de la section droite autour de $\mathbf{e}_z$ est notée $\theta(X)$. La position actuelle $\mathbf{X}(P)$ d'un point P est exprimée en fonction de la position sur la configuration initiale $\tilde{\mathbf{X}}(P_0) = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y$ de ce même point :

$$\mathbf{X}(P) = \begin{cases} X + U - Y \sin \theta \\ V - Y \cos \theta \end{cases} \quad (2.10)$$

La résolution effectuée par [Ngu14] aboutit aux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} -[N(1 + U_{,X})]_{,X} - (M \cos \theta)_{,X} + (T \sin \theta)_{,X} - P \theta_{,X} \sin \theta &= p_x \\ (NV_{,X})_{,X} - (M \sin \theta)_{,X} - (T \cos \theta)_{,X} + P \theta_{,X} \cos \theta &= p_y \\ -[M(1 + U_{,X})]_{,X} \cos \theta - (MV_{,X})_{,X} \sin \theta - T(1 + U_{,X}) \cos \theta - TV_{,X} \sin \theta &= \mu \\ -(M^{(2)} \theta)_{,X} - P[V_{,X} \cos \theta - (1 + U_{,X}) \sin \theta] &= \mu \end{aligned} \quad (2.11)$$

ainsi qu'aux conditions limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 N(0)[1 + U_{,X}(0)] + M(0)\cos\theta(0) - T(0)\sin\theta(0) - P\cos\theta(0) &= -X(0) \\
 N(L)[1 + U_{,X}(L)] + M(L)\cos\theta(L) - T(L)\sin\theta(L) - P\cos\theta(L) &= -X(L) \\
 N(0)V_{,X}(0) + M(0)\sin\theta(0)\theta_{,X}(0) - T(0)\cos\theta(0) - P\sin\theta(0) &= -Y(0) \\
 N(L)V_{,X}(L) + M(L)\sin\theta(L)\theta_{,X}(L) - T(L)\cos\theta(L) - P\sin\theta(L) &= Y(L) \\
 M(0)[1 + U_{,X}(0)]\cos\theta(0) + M(0)V_{,X}(0)\sin\theta(0) + M^{(2)}(0)\theta_{,X}(0) &= -\Gamma(0) \\
 M(L)[1 + U_{,X}(L)]\cos\theta(L) + M(L)V_{,X}(L)\sin\theta(L) + M^{(2)}(L)\theta_{,X}(L) &= \Gamma(L)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur des forces linéiques $\mathbf{p}$ tel que :

$$\mathbf{p} = \int_{S_0} \rho_0 \mathbf{f}_0 dS_0 = \begin{cases} p_x \\ p_y \\ 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Par ailleurs, μ est la composante du vecteur des couples linéiques selon $\vec{e}_z$. $X(0)$, $X(L)$, $Y(0)$, et $Y(L)$ sont les composantes selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ des résultantes aux extrémités $\mathbf{R}(0)$ et $\mathbf{R}(L)$. $\Gamma(0)$ et $\Gamma(L)$ sont les composantes selon $\vec{e}_z$ des moments résultants aux extrémités $\Gamma(0)$ et $\Gamma(L)$:

$$\mathbf{R}(0) = \begin{cases} X(0) \\ Y(0) \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{R}(L) = \begin{cases} X(L) \\ Y(L) \\ 0 \end{cases} \quad \Gamma(0) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \Gamma(0) \end{cases} \quad \Gamma(L) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \Gamma(L) \end{cases} \tag{2.14}$$

Le terme $P = p\pi R^2$ est la résultante des efforts dus à la pression interne. Les contraintes intégrées N , T , M et $M^{(2)}$ sont exprimées à l'aide d'une loi de comportement orthotrope :

$$\begin{aligned}
 N &= N_0 + E_\ell S_0 \left[U_{,X} + \frac{1}{2}(U_{,X^2} + V_{,X^2} + \frac{I_0}{S_0}\theta_{,X^2}) \right] \\
 T &= T_0 + kG_{lt} S_0 [V_{,X} \cos\theta - (1 + U_{,X})\sin\theta] \\
 M &= M_0 + E_\ell I_0 [(1 + U_{,X})\cos\theta + V_{,X}\theta_{,X} \sin\theta] \\
 M^{(2)} &= M_0^{(2)} + E_\ell I_0 \left[U_{,X} + \frac{1}{2}(U_{,X^2} + V_{,X^2} + \frac{K_0}{I_0}\theta_{,X^2}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

où E_ℓ et G_{lt} sont les modules de Young et de cisaillement en configuration initiale. S_0 désigne la section droite dans la configuration initiale et $I_0 = \int_{S_0} Y^2 dS_0$ le moment quadratique de S_0 . $k = 1/2$ est le coefficient de section réduite et $K_0 = \int_{S_0} Y^4 dS_0$ est un coefficient.

Les contraintes intégrées initiales sont définies à partir des précontraintes Σ_{xx}^0 et Σ_{xy}^0 (dues à la pressurisation) :

$$\begin{aligned}
 N_0 &\equiv \int_{S_0} \Sigma_{xx}^0 dS_0 \\
 M_0 &\equiv - \int_{S_0} Y \Sigma_{xx}^0 dS_0 \\
 T_0 &\equiv \int_{S_0} \Sigma_{xy}^0 dS_0 \\
 M_0^{(2)} &\equiv \int_{S_0} Y^2 \Sigma_{xx}^0 dS_0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les équations (2.11), (2.12) et (2.15) sont linéarisées en posant les hypothèses suivantes :

- V/L et θ sont infiniment petits d'ordre 1 et U/L infiniment petit d'ordre 2 ;
- Σ_{xx}^0 est uniforme sur la section droite et Σ_{xy}^0 est nulle.

Les contraintes intégrées linéarisées sont déduites des équations (2.15) :

$$\begin{aligned} N &= N_0 \\ T &= kG_{\ell t} S_0 (V_{,X} - \theta) \\ M &= +E_{\ell} I_0 \theta_{,X} \\ M^{(2)} &= \frac{N_0}{S_0} I_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

et les équations d'équilibre linéarisées des équations (2.11)

$$\begin{aligned} -N_{0,X} &= p_x \\ -(N_0 + kG_{\ell t} S_0) V_{,X^2} + (P + kG_{\ell t} S_0) \theta_{,X} &= p_y \\ -\left(E_{\ell} + \frac{N_0}{S_0} I_0\right) \theta_{,X^2} - (P + kG_{\ell t} S_0) (V_{,X} - \theta) &= \mu \end{aligned} \quad (2.18)$$

enfin, les conditions aux limites sont obtenues après linéarisation des équations (2.12)

$$\begin{aligned} N_0(0) - P &= -X(0) \\ N_0(L) - P &= X(L) \\ (N_0(0) + kG_{\ell t} S_0) V_{,X}(0) - (P + kG_{\ell t} S_0) \theta(0) &= -Y(0) \\ (N_0(L) + kG_{\ell t} S_0) V_{,X}(L) - (P + kG_{\ell t} S_0) \theta(L) &= Y(L) \\ \left(E_{\ell} + \frac{N_0(0)}{S_0} I_0\right) \theta_{,X}(0) &= -\Gamma(0) \\ \left(E_{\ell} + \frac{N_0(L)}{S_0} I_0\right) \theta_{,X}(L) &= \Gamma(L) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ces équations sont valables tant que le pli n'apparaît pas dans la section.

Application : poutre biappuyée soumise à une charge concentrée en son milieu

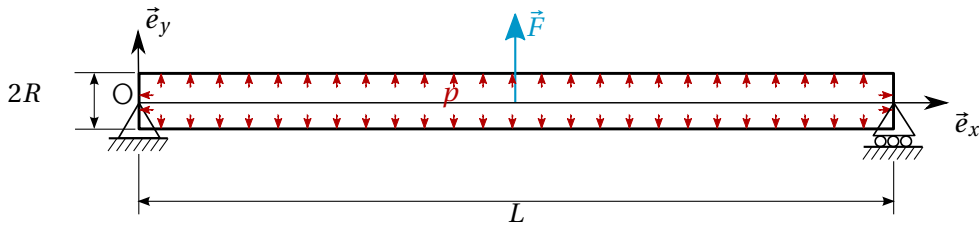


Fig. 2.6 – Poutre biappuyée soumise à une charge concentrée en son milieu.

On propose d'appliquer le résultat du paragraphe précédent au problème d'une poutre gonflable biappuyée soumise à une charge ponctuelle en son milieu. On considère une poutre de longueur L et de rayon R dans la configuration initiale représentée sur la figure 2.6. La pression interne est notée p . Pour ce problème, il n'y a pas de chargement linéique ($p_x = p_y = \mu = 0$) et les réactions aux appuis sont calculées par l'application du principe fondamental de la statique : $X(0) = 0$, $Y(0) = -F/2$, $\Gamma(0) = 0$, $X(L) = 0$, $Y(L) = -F/2$ et $\Gamma(L) = 0$. Les équations (2.18) et (2.19) s'écrivent :

$$\begin{aligned} -N_{0,X} &= 0 \\ -(N_0 + kG_{\ell t} S_0) V_{,X^2} + (P + kG_{\ell t} S_0) \theta_{,X} &= 0 \\ -\left(E_{\ell} + \frac{N_0}{S_0} I_0\right) \theta_{,X^2} - (P + kG_{\ell t} S_0) (V_{,X} - \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
 N_0(0) - P &= 0 \\
 N_0(L) - P &= 0 \\
 (N_0(0) + kG_{\ell t}S_0)V_{,X}(0) - (P + kG_{\ell t}S_0)\theta(0) &= F/2 \\
 (N_0(L) + kG_{\ell t}S_0)V_{,X}(L) - (P + kG_{\ell t}S_0)\theta(L) &= -F/2 \\
 \left(E_{\ell} + \frac{N_0(0)}{S_0}I_0\right)\theta_{,X}(0) &= 0 \\
 \left(E_{\ell} + \frac{N_0(L)}{S_0}I_0\right)\theta_{,X}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

On peut déduire des équations (2.20) et (2.21) que $N_0 = \text{constante} = P$ et réécrire les équations comme :

$$\begin{aligned}
 N_0 &= P \\
 (P + kG_{\ell t}S_0)(V_{,X} - \theta)_{,X} &= 0 \\
 \left(E_{\ell} + \frac{P}{S_0}I_0\right)\theta_{,X^2} + (P + kG_{\ell t}S_0)(V_{,X} - \theta) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
 N_0(0) &= P \\
 N_0(L) &= P \\
 (P + kG_{\ell t}S_0)(V_{,X}(0) - \theta(0)) &= F/2 \\
 (P + kG_{\ell t}S_0)(V_{,X}(L) - \theta(L)) &= -F/2 \\
 \left(E_{\ell} + \frac{P}{S_0}I_0\right)\theta_{,X}(0) &= 0 \\
 \left(E_{\ell} + \frac{P}{S_0}I_0\right)\theta_{,X}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

La résolution des équations (2.22) et (2.23) mène à l'expression de la rotation

$$\theta(X) = \begin{cases} \frac{F}{16(E_{\ell}I_0 + PI_0/S_0)}(L^2 - 4X^2) & \text{si } X \in [0, L/2] \\ \frac{F}{16(E_{\ell}I_0 + PI_0/S_0)}(4(L - X)^2 - L^2) & \text{si } X \in [L/2, L] \end{cases} \tag{2.24}$$

et du déplacement

$$V(X) = \begin{cases} \frac{FX}{48(E_{\ell}I_0 + PI_0/S_0)}(3L^2 - 4X^2) + \frac{FX}{2(P + kG_{\ell t}S_0)} & \text{si } X \in [0, L/2] \\ \frac{F(L - X)}{48(E_{\ell}I_0 + PI_0/S_0)}(8LX - 4X^2 - L^2) + \frac{F(L - X)}{2(P + kG_{\ell t}S_0)} & \text{si } X \in [L/2, L] \end{cases} \tag{2.25}$$

Les équations (2.24) et (2.25) mettent en évidence le rôle important de la pression interne par l'intermédiaire du terme P (*i.e.* la résultante de l'effort de pression sur l'extrémité de la poutre) dans les rigidités de flexion et de cisaillement.

2.2.4 Modèles éléments finis pour les poutres gonflables

L'évolution de la littérature au cours du temps permet de décrire analytiquement (avec des formules de type poutre) le comportement d'une poutre gonflable dans la partie linéaire de la réponse. La performance des modèles est démontrée jusqu'à l'apparition du pli se traduisant par une perte de linéarité du comportement. Il existe également des outils numériques. On distinguera dans ce paragraphes deux approches :

- la modélisation par l'utilisation d'éléments finis membrane 2D qui permet la description du comportement avant comme après l'apparition du pli ;
- la modélisation par des éléments finis poutre 1D principalement utilisée pour la partie linéaire de la réponse et pour résoudre des problèmes de poutres assemblées difficiles à résoudre analytiquement.

Bien que des codes commerciaux permettent l'utilisation d'éléments poutre et membrane, de nombreux auteurs ont travaillé sur le développement d'outils numériques spécifiques pour la résolution de problèmes en mécanique du gonflable. Des éléments membranes sont par exemple utilisés par Veldman [Vel06] et Le Van

[LW06] ou encore Suhey et al. [SKN05] qui modélisent le déplacement de tubes membranaires pressurisés et comparent les résultats aux développements analytiques de Main *et al.* [MPS94]. Barsotti et Ligarò [BL14] proposent un élément membrane spécifique prenant en compte la présence d'un pli par l'ajout d'une loi de comportement locale. Des éléments 2D sont utilisés par Bouzidi et al. [BRW03][BL04][BL13] pour l'étude de membranes pressurisées en minimisant l'énergie potentielle. Le cas du déploiement d'un tube pressurisé est traité en quasi-statique.

On peut trouver dans la littérature, des travaux basés sur l'utilisation d'éléments finis de type poutre gonflable. Les premières approches rencontrées dans la littérature sont celles de Steeves [Ste75a][Ste75b]. Sa démarche repose sur une approche énergétique de minimisation de l'énergie potentielle. Il développe alors un élément linéaire de poutre gonflable faisant apparaître la pression de gonflage dans la rigidité. A partir des équations analytiques déterminées pour les tubes [TW04] et les panneaux [WT02] pressurisés, Thomas et Wielgosz [WT03] proposent deux éléments finis de poutres pour la modélisation des tubes et des panneaux. La rigidité est obtenue en considérant la théorie des poutres de Timoshenko et en traitant la pression interne comme une force suiveuse. Cet élément est utilisé dans la suite de ce travail, et une présentation plus complète est effectuée dans le paragraphe suivant. De la même façon, Le Van et Wielgosz [LW06] puis Apedo et al. [ARJ⁺10] ont écrit une formulation élément-fini de leurs solutions analytiques respectives [LW05] et [ARJ⁺09] pour le déplacement des tubes pressurisés. La discrétisation passe par la mise en œuvre du principe des travaux virtuels en ajoutant un terme représentant la pression de gonflage qui est alors traitée comme une force suiveuse. Une matrice raideur symétrique est alors définie. Les résultats sont comparés avec les résultats d'un maillage 3D composé d'éléments membranes. Les éléments présentés jusqu'ici sont performants jusqu'à l'apparition du pli. Pour aller au delà, un élément fini est développé par Davids [Dav07] puis Davids et Zhang [DZ08] en écrivant le principe des travaux virtuels sur la configuration déformée en considérant l'action de la pression de gonflage. Ce travail permet de prendre en compte dans l'élément les effets du cisaillement, de la pression et de la présence d'un pli localisé. Une comparaison expérimentale est proposée pour plusieurs pressions. Une approche différente est proposée par Ligarò et Barsotti [LB12] qui se basent sur les travaux de Comer et Levy [CL63] pour quantifier la variation du moment quadratique de la section due au pli et la mettre à jour dans un élément fini poutre gonflable. Leur méthode propose une double opération : un premier calcul avec un élément fini poutre gonflable pour permettre le calcul des contraintes dans les sections et attester de la présence ou non d'un pli, puis un second calcul en mettant à jour les caractéristiques de la section en fonction de l'ampleur du pli.

2.2.5 Élément fini de poutre gonflable à deux nœuds

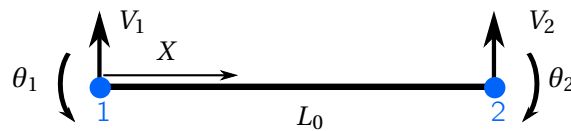


Fig. 2.7 – Élément fini de poutre à deux nœuds.

Les modèles analytiques développés permettent l'étude de structures simples telles que les poutres ou les panneaux. Pour l'étude de structures plus complexes par leur géométrie (tores, arches) ou les assemblages, le recours à la modélisation numérique est quasi-indispensable. L'élément de poutre gonflable développé par Thomas et Wielgosz [WT03] et utilisé par la suite est présenté ici. L'élément fini, schématisé sur la figure 2.7, est de longueur L_0 . Il est constitué de deux nœuds à deux degrés de liberté : les déplacements verticaux (V_1 , V_2) et la rotation des sections (θ_1 , θ_2). Les fonctions d'interpolations du déplacement N_{V_1} , N_{θ_1} , N_{V_2} et N_{θ_2} sont déterminées à partir d'un élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli classique dont le déplacement

s'écrit sous la forme générale :

$$U(X) = \langle N_1(X) N_2(X) N_3(X) N_4(X) \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \langle \mathcal{N}(X) \rangle \{U\}^e \quad (2.26)$$

où $\mathcal{N}$ contient les fonctions d'interpolations cubiques d'Hermite N_1 , N_2 , N_3 et N_4 :

$$\begin{cases} N_1(X) = \left(1 - \frac{X}{L_0}\right)^2 \left(1 + 2\frac{X}{L_0}\right) \\ N_2(X) = X \left(\frac{X}{L_0}\right)^2 \\ N_3(X) = \left(\frac{X}{L_0}\right)^2 \left(3 - 2\frac{X}{L_0}\right) \\ N_4(X) = -\frac{X^2}{L_0} \left(1 - \frac{X}{L_0}\right) \end{cases} \quad (2.27)$$

Dans le cas des poutres d'Euler-Bernoulli l'expression de la rotation de section s'obtient directement à partir de la déformée par la relation classique :

$$\frac{dV}{dX} = \theta \quad (2.28)$$

Dans le cadre des poutres gonflables, l'utilisation d'une cinématique de Timoshenko est nécessaire. La section n'est plus orthogonale à la ligne neutre. Les degrés de liberté correspondent alors aux déplacements verticaux (V_1 , V_2) et à leurs dérivées (dV_1/dX , dV_2/dX) notées respectivement (V'_1 , V'_2). L'équation (2.26) s'écrit alors :

$$U(X) = \langle N_1(X) N_2(X) N_3(X) N_4(X) \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ V'_1 \\ V_2 \\ V'_2 \end{Bmatrix} = \langle \mathcal{N}(X) \rangle \{\tilde{U}\}^e \quad (2.29)$$

L'élément est écrit pour un matériau isotrope, l'expression de la rotation de section peut s'écrire en fonction du module de Young E , du module de cisaillement G , de la section S , du moment quadratique I , du coefficient de section réduite k et de la pression de gonflage p par l'intermédiaire du terme $P = p\pi R^2$ (R est le rayon de la poutre) :

$$\theta(X) = \frac{dV}{dX} + \frac{(E + \frac{P}{S})I}{P + kGS} \frac{d^3V}{dX^3} = \frac{dV}{dX} + \frac{L_0^2 \phi_p}{12} \frac{d^3V}{dX^3} \quad (2.30)$$

avec,

$$\phi_p = \frac{12(E + \frac{P}{S})I}{L_0^2(P + kGS)} \quad (2.31)$$

Cette équation permet de relier les inconnues $\{\tilde{U}\}^{eT} = \langle V_1 V'_1 V_2 V'_2 \rangle$ aux inconnues $\{U\}^{eT} = \langle V_1 \theta_1 V_2 \theta_2 \rangle$ qui permettent l'interpolation du déplacement :

$$U(X) = \langle N_{V_1}(X) N_{\theta_1}(X) N_{V_2}(X) N_{\theta_2}(X) \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

L'équation (2.30) permet d'écrire :

$$\theta(X) = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{d}{dX} \langle \mathcal{N} \rangle \{\tilde{U}\}^e + \frac{L_0^2 \phi_p}{12} \frac{d^3}{dX^3} \langle \mathcal{N} \rangle \{\tilde{U}\}^e \quad (2.33)$$

et les conditions limites :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_1 \\ \theta(L_0) = \theta_2 \end{cases} \quad (2.34)$$

mènent à l'égalité suivante :

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_p}{L_0} & \left(1 + \frac{\phi_p}{2}\right) & -\frac{\phi_p}{L_0} & \frac{\phi_p}{2} \\ \frac{\phi_p}{L_0} & \frac{\phi_p}{2} & -\frac{\phi_p}{L_0} & \left(1 + \frac{\phi_p}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1' \\ V_2 \\ V_2' \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

finalemt,

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_1' \\ V_2 \\ V_2' \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 + \phi_p} \begin{bmatrix} 1 + \phi_p & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\phi}{L_0} & \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) & -\frac{\phi}{L_0} & \frac{\phi}{2} \\ 0 & 0 & 1 + \phi_p & 0 \\ \frac{\phi}{L_0} & \frac{\phi}{2} & -\frac{\phi}{L_0} & \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [A]\{U\}^e \quad (2.36)$$

ou plus simplement,

$$U(x) = \langle \mathcal{N} \rangle [A]\{U\}^e \quad (2.37)$$

Les fonctions d'interpolations sont alors identifiées par le produit $\langle \mathcal{N} \rangle [A]$ et dépendent à la fois des matériaux et de la pression de gonflage par le terme ϕ_p .

$$\begin{cases} N_{V_1}(X) = \frac{(X-L_0)(2X^2-XL_0-L_0^2(1+\phi_p))}{L_0^3(1+\phi_p)} \\ N_{\theta_1}(X) = \frac{1}{2} \frac{X(X-L_0)(2X-L_0(2+\phi_p))}{L_0^2(1+\phi_p)} \\ N_{V_2}(X) = -\frac{X(2X^2-3XL_0-L_0^2\phi_p)}{L_0^3(1+\phi_p)} \\ N_{\theta_2}(X) = \frac{1}{2} \frac{X(X-L_0)(2X+L_0\phi_p)}{L_0^2(1+\phi_p)} \end{cases} \quad (2.38)$$

Après avoir écrit le principe des travaux virtuels puis après discrétisation, la matrice de rigidité est obtenue :

$$[K]^e = \frac{(E + \frac{P}{S})I}{L_0^3(1+\phi_p)} \begin{bmatrix} 12 & 6L_0 & -12 & 6L_0 \\ 6L_0 & L_0^2(4+\phi_p) & -6L_0 & L_0^2(2-\phi_p) \\ -12 & -6L_0 & 12 & -6L_0 \\ 6L_0 & L_0^2(2-\phi_p) & -6L_0 & L_0^2(4+\phi_p) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

L'expression de la matrice de rigidité fait apparaître explicitement l'effet de la pression de gonflage qui renforce la rigidité par le terme $(E + P/S)I$. Il est à souligner que la matrice de rigidité obtenue est analogue à celle d'un élément fini de Timoshenko classique. En effet, en remplaçant respectivement les termes $E + P/S$ et $P + kGS$ par E et kGS dans la matrice de poutre gonflable, la formulation classique d'un élément poutre de Timoshenko apparaît. L'expression de la matrice masse peut se trouver dans [TJW06].

2.2.6 Cas de la dynamique

Le développement d'élément finis permet également l'étude en dynamique de structures gonflables, les travaux de Jiang [Jia07] proposent une expression de la matrice masse à partir des équations linéarisées obtenues par Le Van et Wielgosz [LW05]. Dans ce modèle, la matrice masse dépend de la pression de gonflage, l'étude contient une comparaison théorie-expérience. Des études vibratoires sont menées pour des applications particulières de barrages gonflables [Hsi88][Cho97]. Rodriguez et al. [RRCT11] font appel à des aspects dynamiques pour simuler le gonflage d'une structure membranaire en passant par un algorithme de relaxation dynamique. Une étude dynamique de l'effondrement d'un bâtiment gonflable fabriqué à partir d'un assemblage de poutres gonflables est menée par Li et al. [LGQG15] qui proposent une comparaison

entre les résultats d'une simulation par éléments finis et des essais.

2.2.7 Charge de pli - Charge de ruine

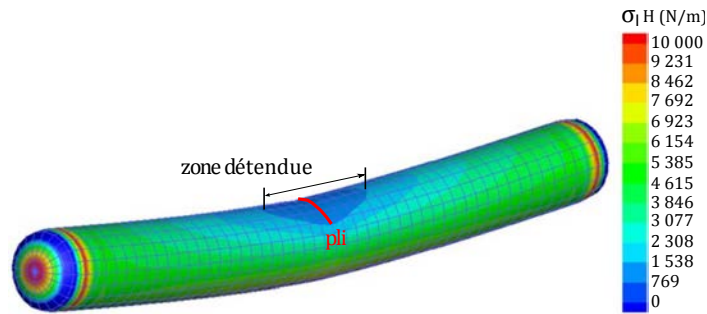


Fig. 2.8 – État de la contrainte principale $\sigma_I H$ après l'apparition d'un pli dans une poutre gonflable biappuyée soumise à une charge concentrée en son milieu.

La nature même des membranes fait qu'elles ne présentent pas de rigidité en flexion. Dès lors, un pli apparaît lorsque l'une des contraintes principales s'annule. La charge provoquant un tel état de contrainte est la charge de pli [CL63][LB12]. Cette configuration ne correspond pas pour autant à une ruine, la poutre résistant toujours aux sollicitations extérieures. L'augmentation de la charge entraîne la propagation du pli dans la section et l'apparition d'une zone détendue le long de la poutre. Cette zone est définie par l'ensemble des sections présentant au moins un point pour lequel l'une des contraintes principales est nulle. Le pli et la zone détendue sur une poutre gonflable biappuyée en flexion sont représentés sur la figure 2.8, cette figure est obtenue par un calcul élément fini à partir d'éléments membrane. Le code, développé au laboratoire, est basé sur une formulation lagrangienne totale. La contrainte σ_I est calculée numériquement en diagonalisant le tenseur des contraintes de Cauchy (calculé en configuration actuelle) dans la base naturelle ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$). On remarque par ailleurs que la contrainte est représentée par son produit avec l'épaisseur H du textile. Cette représentation est usuelle dans la communauté de la mécanique des structures textiles et est cohérente avec l'utilisation des modules de nappe. Ce n'est seulement qu'à partir d'une certaine propagation que la ruine est atteinte. La ruine est définie par un maximum dans la courbe force (F) -déplacement (V) :

$$\frac{dF}{dV} = 0 \quad (2.40)$$

L'apparition de pli sur des tubes à paroi mince n'est pas spécifique au gonflable. En 1927, Brazier [Bra27] s'intéresse à la ruine d'un tube rigide isotrope à paroi mince : il lie la ruine au phénomène d'ovalisation de la section. L'ovalisation provoque un changement de géométrie de la section qui agit sur la valeur du moment quadratique et aboutit à une perte de rigidité. L'évolution du moment de flexion en fonction de la flèche passe alors par un maximum correspondant au moment limite. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Brazier. La prise en compte de l'orthotropie dans l'effet Brazier intervient plus tard avec les travaux de Haya-shi [Hay49] et plus récemment de Baruch et al. [BAZ92] toujours dans le cas de tubes rigides non pressurisés.

L'extension de l'effet Brazier aux tubes pressurisés isotropes est envisagée par Wood [Woo58]. Ces résultats sont adaptés au caractère orthotrope du textile par Veldman *et al.* [VBB04] en suivant le raisonnement appliqué par Wood. En adoptant une approche énergétique (*i.e.* plus d'hypothèses sur la géométrie de la section), Leonard et al. [LBM60] déterminent la charge de ruine d'une poutre gonflable console isotrope en émettant l'hypothèse qu'à la ruine, la liaison se comporte comme une rotule plastique. Stein et Hedgepeth [SH61] confirment le résultat de Leonard et al. [LBM60] en traitant le cas d'une poutre gonflable soumise à un moment de flexion uniforme et en résolvant les équations d'équilibre de la théorie de l'élasticité. Dans leur étude, Comer et Levy [CL63] s'intéressent également à la charge ruine. En posant l'hypothèse que la

ruine est atteinte lorsque que la contrainte devient nulle sur l'intégralité de la section pliée, ils retrouvent la valeur déterminée par Leonard et al. [LBM60] puis Stein et Hedgepeth [SH61]. Dans le même temps Zender [Zen62], en adoptant une approche de type membrane, montre que le moment obtenu précédemment [LBM60][SH61] est surestimé, il propose alors une correction. Un rapport de la Nasa publié en 1965 (et révisé en 1968) [WSP68] considérant le comportement orthotrope débouche sur un moment de ruine plus faible que celui attendu [LBM60][SH61]. Lukasiewicz et Balas proposent une expression de rotule pneumatique par des considérations géométriques sous l'hypothèse d'inextensibilité de la membrane [LB90a][LB90b]. Bien qu'aboutissant à des résultats différents pour la valeur de la charge de ruine, ces modèles présentent un point commun : tous considèrent que la ruine est atteinte lorsque le pli s'est propagé sur l'intégralité de la section.

La figure 2.9 représente l'évolution de la contrainte dans la section pliée. Avant l'apparition du pli (cas (a)) la contrainte principale axiale Σ_{xx} est positive sur l'ensemble de la section. Lors de la propagation du pli (cas (b)), la contrainte principale axiale Σ_{xx} est nulle sur une partie de la section (repérée par l'angle ϕ_0). A la ruine (cas(c)), la contrainte principale axiale Σ_{xx} est nulle sur l'ensemble de la section excepté un point (*i.e.* $\phi \rightarrow \pi$). La ruine peut se définir à partir de l'étude bibliographique comme :

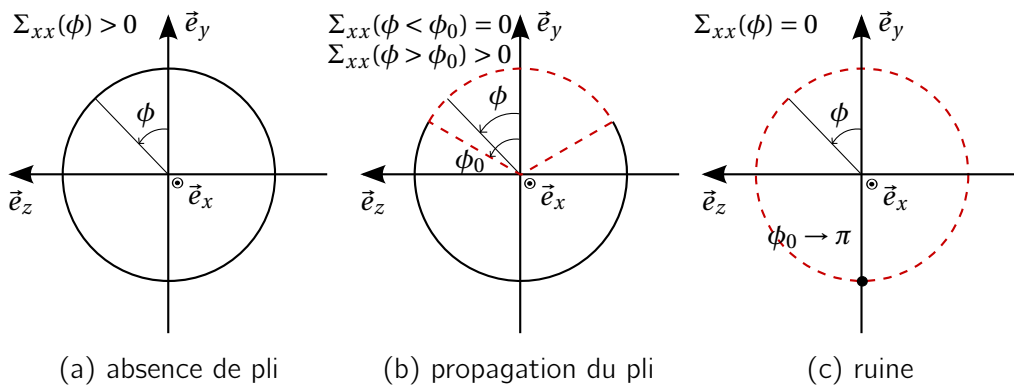


Fig. 2.9 – État de la contrainte principale Σ_{xx} dans une section pliée à partir de la bibliographie.

Définition :

La charge de ruine est définie par un extremum de la courbe force-déplacement :

$$\frac{dF}{dV} = 0 \quad (2.41)$$

Hypothèse :

La ruine intervient lorsque le pli s'est propagé à l'intégralité de la section.

Cette hypothèse est remise en cause par Thomas [Tho02] qui constate expérimentalement que la ruine intervient non pas lorsque le pli affecte l'intégralité de la section, mais seulement la moitié de cette dernière. Une expression est alors proposée pour la ruine à partir des résultats expérimentaux.

2.2.8 Conclusion

L'état de l'art permet de dresser le constat suivant :

- La réponse d'une poutre gonflable dans sa zone de fonctionnement linéaire d'une part et la prévision de la charge de plissage d'une autre part sont aujourd'hui maîtrisées.
- La description de la partie non-linéaire de la réponse n'est abordée que par la modélisation numérique. Aucun modèle analytique n'est disponible.

- La détermination de la charge de ruine demande des investigations supplémentaires bien que des études aient été menées. En effet, une contradiction demeure entre les modèles qui prévoient la ruine lorsque la section est intégralement soumise au pli et les essais de [Tho02] qui montrent que la ruine est effective lorsque la moitié de la section est soumise au pli.

L'étude proposée ici a pour objectif de répondre aux deux derniers points de ce constat. Dans un premier temps, un moment de ruine est proposé en considérant la répartition des contraintes dans une section circulaire d'une poutre gonflable. Dans un second temps, un développement analytique en étendant les formules analytiques issues des travaux [Ngu14] au comportement post-pli de la poutre et obtenir un modèle de comportement complet.

2.3 Charge de ruine pour une poutre gonflable

Soit une poutre gonflable de rayon R et de longueur L à la fin du gonflage. On note H l'épaisseur du tissu. La pression interne est notée p . Une section S de la poutre soumise à un moment de flexion M est isolée. Le raisonnement est mené sur la configuration initiale, les contraintes sont alors exprimées par le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce Σ , et les hypothèses suivantes sont posées :

- les sections droites restent planes ;
- la partie non pliée de la section reste circulaire ;
- le décalage de la ligne neutre est négligé.

2.3.1 Contraintes dues à la mise en pression

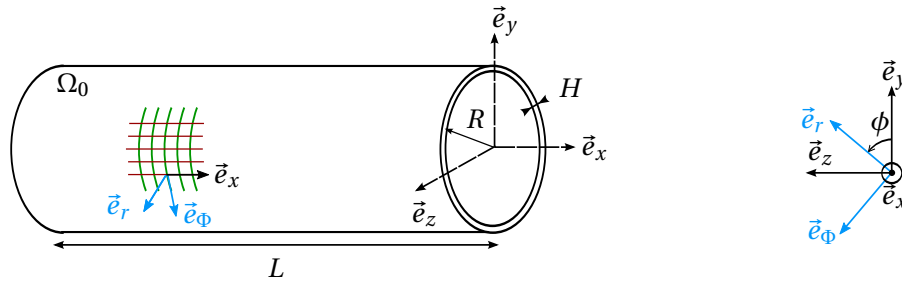


Fig. 2.10 – Paramétrage de la poutre et orientation des repères.

La mise sous pression a pour conséquence de mettre la poutre en état de précontrainte, lui permettant ainsi de résister à divers types de chargement. Cet état se traduit par des contraintes axiale Σ_{xx}^0 selon $\vec{e}_x$ et tangentielle $\Sigma_{\phi\phi}^0$ selon $\vec{e}_\phi$, représentées sur la figure 2.10. Ces deux contraintes sont déterminées par l'équilibre des sections obtenues par une coupe transversale et une coupe longitudinale de la poutre comme sur la figure 2.11.

La surface de la section obtenue par la coupe transversale vaut $2\pi RH$. On considère que la contrainte axiale est uniforme. Si on se réfère aux équations 2.16, l'effort normal N_0 du à la pressurisation dans la poutre est alors égal à :

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \int_{S_0} \Sigma_{xx}^0 dS \\
 &= \Sigma_{xx}^0 \int_{S_0} dS \\
 &= 2\pi RH \Sigma_{xx}^0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

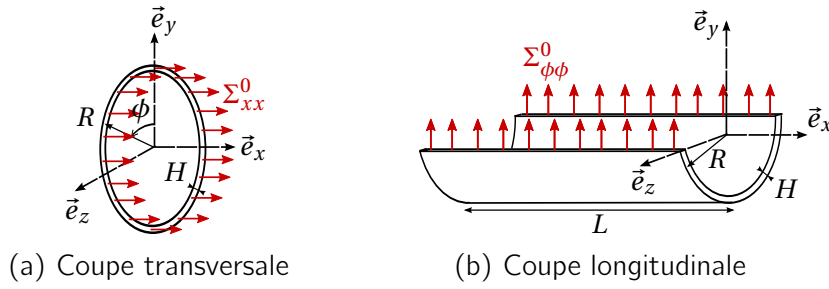


Fig. 2.11 – Coupes transversale (a) et longitudinale (b) de la poutre pour le calcul de la pré-tension introduite par le gonflage.

L'effort normal N_0 est égal à la résultante $P = p\pi R^2$ des efforts de pression sur la section située à l'extrémité de la poutre. L'équilibre de la contrainte axiale impose :

$$2\pi RH\Sigma_{xx}^0 = p\pi R^2 \quad (2.43)$$

et donc,

$$\Sigma_{xx}^0 = \frac{pR}{2H} \quad (2.44)$$

De la même façon, la section obtenue par la coupe longitudinale de la poutre est égale à $2LH$. On considère que la contrainte $\Sigma_{\phi\phi}^0$ est uniforme sur cette section. L'effort interne correspondant à ces contraintes équilibre l'effet de la pression sur les parois latérales :

$$2LH\Sigma_{\phi\phi}^0 = 2RLp \quad (2.45)$$

ainsi,

$$\Sigma_{\phi\phi}^0 = \frac{pR}{H} \quad (2.46)$$

La comparaison des deux précontraintes montre que la contrainte tangentielle est 2 fois plus importante que la contrainte axiale. C'est donc la contrainte tangentielle qui conditionne la pression maximale p_{max} applicable à la poutre pour ne pas dépasser la limite de résistance du matériau ou des liaisons (soudure, couture, collage...). Si σ_m est la limite d'élasticité :

$$p_{max} = \frac{\sigma_m H}{R} \quad (2.47)$$

2.3.2 État de la contrainte pour une poutre gonflable en flexion

La répartition de la contrainte axiale due à la flexion Σ_{xx}^f dans la section isolée soumise au moment de flexion M est obtenue de façon classique (formulation de type résistance des matériaux) et suit la relation suivante :

$$\Sigma_{xx}^f = -\frac{M}{I_{G_z}} R \cos\phi \quad (2.48)$$

où I_{G_z} est le moment quadratique de la section S par rapport à l'axe G_z . Pour une poutre de section circulaire de rayon R et d'épaisseur H ,

$$I_{G_z} = \pi R^3 H \quad (2.49)$$

Pour alléger les notations, ce moment est noté simplement I par la suite. La contrainte axiale dans la section est la somme de la précontrainte axiale Σ_{xx}^0 et de la contrainte de flexion Σ_{xx}^f (fig. 2.12) :

$$\Sigma_{xx} = \Sigma_{xx}^f + \Sigma_{xx}^0 = -\frac{M}{I} R \cos\phi + \frac{pR}{2H} \quad (2.50)$$

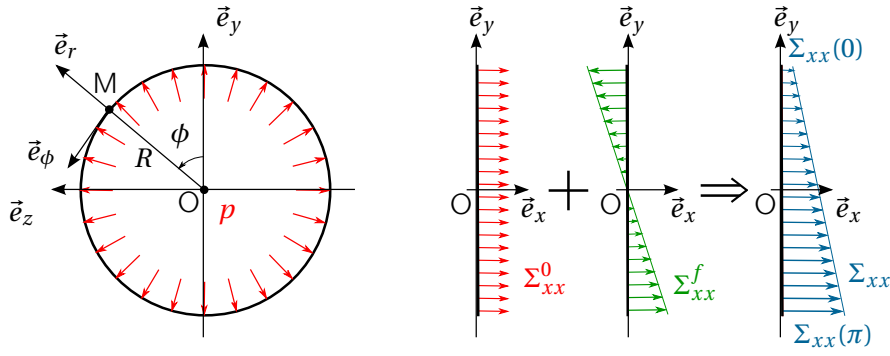


Fig. 2.12 – Décomposition de la répartition des contraintes avant l'apparition du pli.

On émet l'hypothèse qu'un pli apparaît lorsqu'une des contraintes principale s'annule. La contrainte tangentielle est uniforme dans le cas présent. La contrainte axiale s'annule d'abord en $\phi = 0$ (*i.e.* $\Sigma_{xx}(0) = 0$ à la surface de la poutre), donnant ainsi l'expression du moment de plissage.

$$M^{pli} = \frac{p\pi R^3}{2} = \frac{pI}{2H} \quad (2.51)$$

Si le moment de flexion dans la section continue d'augmenter au delà du moment de plissage, le pli se propage dans la section. L'angle ϕ_0 est introduit pour modéliser la propagation du pli. La section se décompose en deux parties : la partie inactive est définie par l'ensemble des points pour lesquels la contrainte axiale Σ_{xx} est supposée nulle (*i.e.* $\phi < \phi_0$ sur la figure 2.13). La partie active est définie par l'ensemble des points pour lesquels la contrainte axiale Σ_{xx} est supposée non nulle (*i.e.* $\phi > \phi_0$ sur la figure 2.13).

Le modèle choisi s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- La pré-contrainte due au gonflage et la contrainte de flexion s'additionnent ;
- La distribution de la contrainte axiale Σ_{xx} sur la partie active de la section est conservée après l'apparition du pli :

$$\begin{cases} \Sigma_{xx}(\phi) = 0 & \text{si } \phi \in [-\phi_0, \phi_0] \\ \Sigma_{xx}(\phi) = -aR\cos\phi + b & \text{si } \phi \in [\phi_0, 2\pi - \phi_0] \end{cases} \quad (2.52)$$

L'équilibre de la section s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \Sigma_{xx} R H d\phi = p\pi R^2 \\ \Sigma_{xx}(\phi = \phi_0) = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

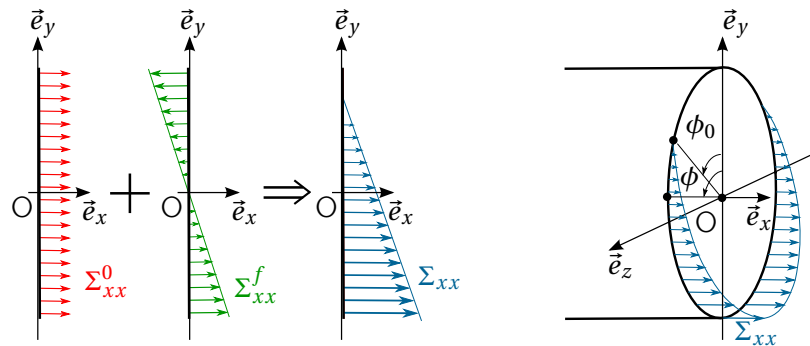


Fig. 2.13 – Décomposition de la répartition des contraintes après l'apparition du pli.

Les constantes a et b sont identifiées par la résolution du système :

$$a = \frac{p\pi}{2H\cos\phi_0(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \quad (2.54)$$

$$b = \frac{p\pi R}{2H(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \quad (2.55)$$

L'expression obtenue pour la répartition de la contrainte axiale Σ_{xx} dans la section est alors :

$$\Sigma_{xx} = \frac{p\pi R}{2H(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \left(1 - \frac{\cos\phi}{\cos\phi_0} \right) \quad (2.56)$$

Le moment de flexion dû à la répartition de la contrainte axiale dans la section est défini dans l'équation (2.16) et est calculé en O de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M &= - \int_S Y \Sigma_{xx} dS \\ &= - \int_{\phi_0}^{2\pi-\phi_0} R \cos\phi \times \Sigma_{xx} R H d\phi \\ &= - \int_{\phi_0}^{2\pi-\phi_0} R^2 \frac{p\pi R}{2(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \left(1 - \frac{\cos\phi}{\cos\phi_0} \right) \cos\phi d\phi \end{aligned} \quad (2.57)$$

en identifiant l'expression du moment quadratique $I = 2\pi R^3 H$ dans l'équation précédente, le moment de plissage (2.51) apparaît dans l'expression,

$$M = - \frac{M^{pli}}{(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \int_{\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \left(1 - \frac{\cos\phi}{\cos\phi_0} \right) \cos\phi d\phi \quad (2.58)$$

Sachant que $\cos^2\phi = (1 + \cos 2\phi)/2$,

$$\begin{aligned} M &= - \frac{M^{pli}}{(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \int_{\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \left(\cos\phi - \frac{1 + \cos 2\phi}{2\cos\phi_0} \right) d\phi \\ &= - \frac{M^{pli}}{(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \left[\sin\phi - \frac{\sin 2\phi}{4\cos\phi_0} - \frac{\phi}{2\cos\phi_0} \right]_{\phi_0}^{2\pi-\phi_0} \end{aligned} \quad (2.59)$$

finally, le moment de flexion est identifié en fonction de M^{pli} et ϕ_0 :

$$M = \frac{M^{pli}}{(\pi - \phi_0 + \tan\phi_0)} \left(\frac{\pi - \phi_0}{\cos\phi_0} + \sin\phi_0 \right) \quad (2.60)$$

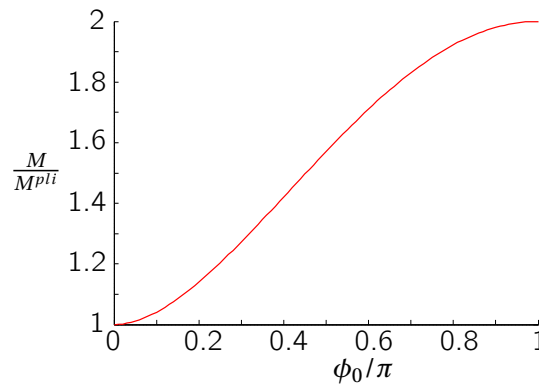


Fig. 2.14 – Évolution du moment de flexion adimensionné en fonction de l'angle ϕ_0 .

L'évolution du moment de flexion est tracée en fonction de l'angle de pli sur la figure 2.14. Le calcul de la limite en $\phi_0 = \pi$ du moment de flexion s'effectue par la règle de L'Hôpital : Si f et g sont deux fonctions

définies sur $[a, b]$, dérivables en a , s'annulant en a et telles que le quotient $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ soit défini, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (2.61)$$

Soient $f(\phi_0) = \frac{\pi - \phi_0}{\cos \phi_0} + \sin \phi_0$ et $g(\phi_0) = \pi - \phi_0 + \tan \phi_0$ définies sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, le rapport des dérivées

$$\begin{aligned} \frac{\frac{df(\phi_0)}{d\phi_0}}{\frac{dg(\phi_0)}{d\phi_0}} &= \frac{-\cos \phi_0 + (\pi - \phi_0) \sin \phi_0}{\cos^2 \phi_0} + \cos \phi_0 \\ &= \tan^2 \phi_0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

présente lui aussi une forme indéterminé 0/0 lorsque ϕ_0 tend vers π . Il en est de même pour le rapport des dérivées secondes.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d^2 f(\phi_0)}{d\phi_0^2}}{\frac{d^2 g(\phi_0)}{d\phi_0^2}} &= \frac{(\pi - \phi_0)(1 + 2\tan^2 \phi_0) - 2\tan \phi_0}{\cos \phi_0} - \sin \phi_0 \\ &= 2(1 + \tan^2 \phi_0) \tan \phi_0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

il faut continuer jusqu'à la dérivée troisième pour obtenir la solution.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d^3 f(\phi_0)}{d\phi_0^3}}{\frac{d^3 g(\phi_0)}{d\phi_0^3}} &= \frac{(\pi - \phi_0)(6\tan^3 \phi_0 + 5\tan \phi_0) - 3(1 + 2\tan^2 \phi_0)}{\cos \phi_0} - \cos \phi_0 \\ &= 2 + 8\tan^2 \phi_0 + 6\tan^4 \phi_0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

finalement,

$$\lim_{\phi_0 \rightarrow \pi} \frac{f(\phi_0)}{g(\phi_0)} = \lim_{\phi_0 \rightarrow \pi} \frac{\frac{df(\phi_0)}{d\phi_0}}{\frac{dg(\phi_0)}{d\phi_0}} = \lim_{\phi_0 \rightarrow \pi} \frac{\frac{d^2 f(\phi_0)}{d\phi_0^2}}{\frac{d^2 g(\phi_0)}{d\phi_0^2}} = \frac{\frac{d^3 f(\pi)}{d\phi_0^3}}{\frac{d^3 g(\pi)}{d\phi_0^3}} = 2 \quad (2.65)$$

Le critère de ruine proposé dans la littérature (cf équation (2.41)) peut s'écrire localement dans la section isolée en fonction de la courbure χ :

$$\frac{dM}{d\chi} = \frac{dM}{d\phi_0} \frac{d\phi_0}{d\chi} = 0 \quad (2.66)$$

A priori, on constate que le pli semble pouvoir se propager jusqu'à un angle maximal $\phi_0 = \pi$, comme considéré dans la littérature si on considère uniquement le moment de flexion. On propose de s'intéresser à la courbure χ par la définition d'une rotule pneumatique.

2.3.3 Expression de la rotule pneumatique

La présence du pli a pour conséquence l'apparition d'une rotule pneumatique au niveau de la section affectée. On modélise cette rotule par un élément d'épaisseur infinitésimale dx . On introduit le rayon de courbure local ρ et la courbure locale χ :

$$\chi = \frac{1}{\rho} \quad (2.67)$$

La figure 2.15 propose une cinématique pour la rotule pneumatique. La configuration (a) représente l'état initial de la section d'épaisseur infinitésimale dx . Le rayon de courbure ρ est infini et la courbure χ est nulle. L'apparition du pli est représentée par la configuration (b) : La contrainte Σ_{xx} est nulle en $\phi = 0$, cet état se traduit par un croisement des extrémités de l'élément dx en $\phi = 0$. Le rayon de courbure ρ est alors égal au rayon R de la poutre et la courbure χ est égale à $1/R$. Au cours de la propagation du pli dans la section, configuration (c), la contrainte Σ_{xx} est nulle pour $\phi \in [-\phi_0, \phi_0]$. Cet état se traduit par un croisement des extrémités de l'élément dx en ϕ_0 . Le rayon de courbure est alors :

$$\rho = R \cos \phi_0 \quad (2.68)$$

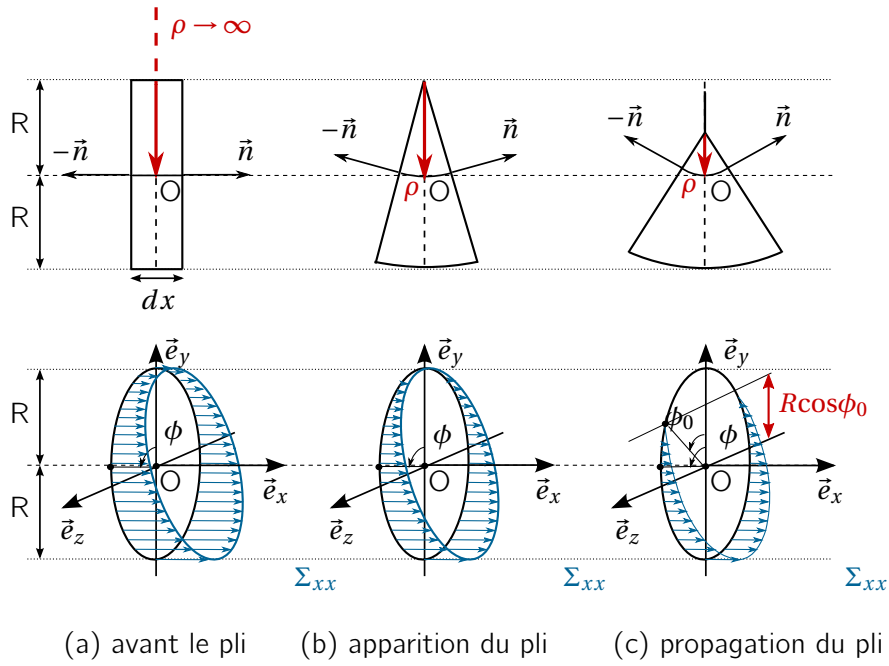


Fig. 2.15 – Représentation de la rotule pneumatique et état de la contrainte associée dans une section.

et la courbure χ est :

$$\chi = \frac{1}{R \cos \phi_0} \quad (2.69)$$

Cette expression s'annule en $\phi_0 = \pi/2$. L'évolution de la courbure en fonction de l'angle ϕ_0 est tracée sur la figure 2.16.

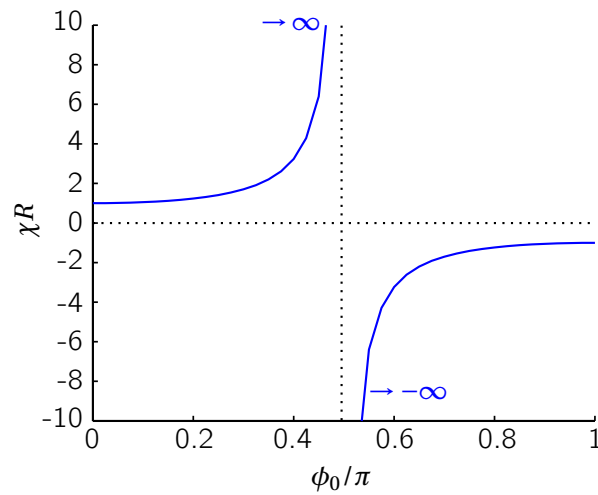


Fig. 2.16 – Évolution de la courbure en fonction de l'angle du pli ϕ_0 .

2.3.4 Charge de ruine pour une poutre gonflable

Comme expliqué précédemment, le critère de ruine proposé dans la littérature (cf équation (2.41)), exprimé par une variable globale F , s'écrit localement :

$$\frac{dM}{d\chi} = 0 \quad (2.70)$$

en faisant intervenir l'angle ϕ_0 on obtient :

$$\frac{dM}{d\phi_0} \frac{d\phi_0}{d\chi} = 0 \quad (2.71)$$

Deux cas de figure sont possibles : le premier est la nullité de la dérivée du moment de flexion M par rapport à l'angle ϕ_0 et le second est la nullité de la dérivée de l'angle ϕ_0 par rapport à la courbure χ . Le premier cas est satisfait lorsque $\phi_0 = \pi$ (cf. fig. 2.14) et le second cas est satisfait lorsque $\phi_0 = \pi/2$ (cf. fig. 2.16). La ruine est alors atteinte lorsque $\phi_0 = \pi/2$.

En considérant ce résultat dans l'expression du moment de flexion déterminée avec l'équation (2.60), le moment maximal admissible par la section vaut :

$$M^{ruine} = \frac{\pi}{2} M^{pli} = \frac{\pi}{4} \frac{pI}{H} = \frac{p\pi^2 R^3}{4} \quad (2.72)$$

On remarque que cette expression dépend uniquement de la géométrie de la poutre dans la configuration initiale Ω_0 et de la pression de gonflage p pour le cas d'une poutre droite. La charge de ruine est indépendante du matériau. On peut à partir de l'équation (2.72) établir l'expression de la charge de ruine pour une poutre gonflable biappuyée soumise à une charge concentrée en son milieu. Pour ce problème le moment de flexion est maximal en $X = L/2$:

$$M = \frac{FL}{4} \quad (2.73)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} F^{ruine} &= \frac{4M^{ruine}}{L} \\ &= \frac{p\pi^2 R^3}{L} \\ &= \frac{\pi}{2} F^{pli} \end{aligned} \quad (2.74)$$

A la suite de cette étude, deux nouvelles hypothèses sont formulées dans la définition de la ruine pour une poutre gonflable.

Definition :

La charge de ruine est définie par un extremum de la courbe force-déplacement :

$$\frac{dF}{dV} = 0 \quad (2.75)$$

Hypothèse 1 :

La ruine intervient lorsque le pli s'est propagé à la moitié de la section.

Hypothèse 2 :

La charge de ruine dépend uniquement de la géométrie de la poutre en configuration initiale Ω_0 pour une poutre droite.

2.4 Expression analytique du déplacement post-plissage

2.4.1 Notion de zone détendue

Déjà introduite par Comer et Levy [CL63] dans l'étude d'une poutre console pressurisée, une zone détendue se forme lorsqu'on continue d'augmenter le chargement au delà de la charge de pli. Cette zone est constituée de portions de sections pour lesquelles l'une des contraintes principales est nulle en un point. Cette considération est importante dans la mesure où le pli, localisé sur une seule section, n'est pas considéré comme un phénomène local puisqu'il affecte les sections voisines même s'il ne se forme pas de pli physique sur

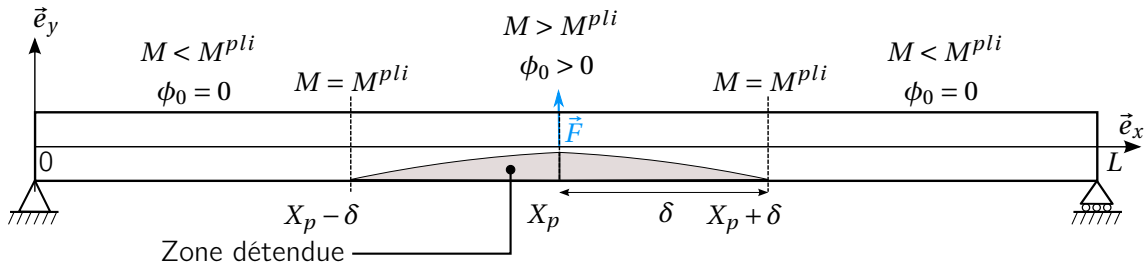


Fig. 2.17 – Zone détendue sur une poutre gonflable biappuyée.

ces dernières. On travaille sur la poutre biappuyée de la figure 2.17. La zone détendue s'étend de l'abscisse $X_p - \delta$ à l'abscisse $X_p + \delta$, où X_p correspond à l'abscisse d'apparition du pli :

$$X_p \text{ tel que } M(X_p) = \max|M| \quad (2.76)$$

et où l'abscisse $X_0 = X_p + \delta$ est définie telle que :

$$X_0 \text{ tel que } M(X_0) = M^{pli} \quad (2.77)$$

Dans le cas d'une poutre biappuyée, le moment de flexion sur l'intervalle $[L/2, L]$ vaut :

$$M = \frac{F}{2}(L - X) \quad (2.78)$$

en utilisant les équations (2.76) et (2.152) valide pour la poutre biappuyée,

$$X_p = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \quad (2.79)$$

et

$$M^{pli} = \frac{F}{2}(L - X_0) \quad (2.80)$$

soit,

$$X_0 = L - \frac{2M^{pli}}{F} \quad (2.81)$$

La demi-longueur δ de la zone détendue est la différence entre les abscisses X_0 et X_p :

$$\delta = |X_0 - X_p| \quad (2.82)$$

La demi-longueur δ atteint une valeur maximale δ_m à la ruine. En remplaçant X_0 , X_p et M^{pli} par leur valeur (équ. 2.51), on a :

$$\delta_m = |X_0 - X_p| = \frac{L}{2}(1 - 2/\pi) \simeq 0,18L \quad (2.83)$$

Cette valeur est à multiplier par 2 pour obtenir la longueur maximale de la zone détendue (fig. 2.17). Cela signifie que près de 40% des sections de la poutre connaissent une perte de rigidité à la ruine.

2.4.2 Poutre droite fictive équivalente

Le modèle développé pour l'étude analytique du déplacement repose sur la définition d'une poutre droite équivalente à sections circulaires fictives permettant l'utilisation des équations de poutres gonflables présentées au paragraphe 2.2.3. Soit une poutre gonflable biappuyée de rayon R et de longueur L en configuration initiale. La poutre déformée (configuration actuelle) après l'apparition du pli est représentée sur la figure 2.18(a). La configuration actuelle est très éloignée de la configuration initiale sur laquelle les équations de

poutre gonflable s'appliquent. On propose donc de définir un poutre droite fictive équivalente, représentée sur la figure 2.18(b), sur laquelle les équations de poutre peuvent s'appliquer. La poutre réelle et la poutre fictive sont divisées en deux zones. Une première zone, notée (1) sur la figure, est formée des sections pour lesquelles le moment de flexion est supérieur au moment de plissage. Une partie de ces sections appartient à la zone détendue. Une seconde zone, notée (2) sur la figure, est constituée des sections pour lesquelles le moment de flexion est inférieur au moment de plissage.

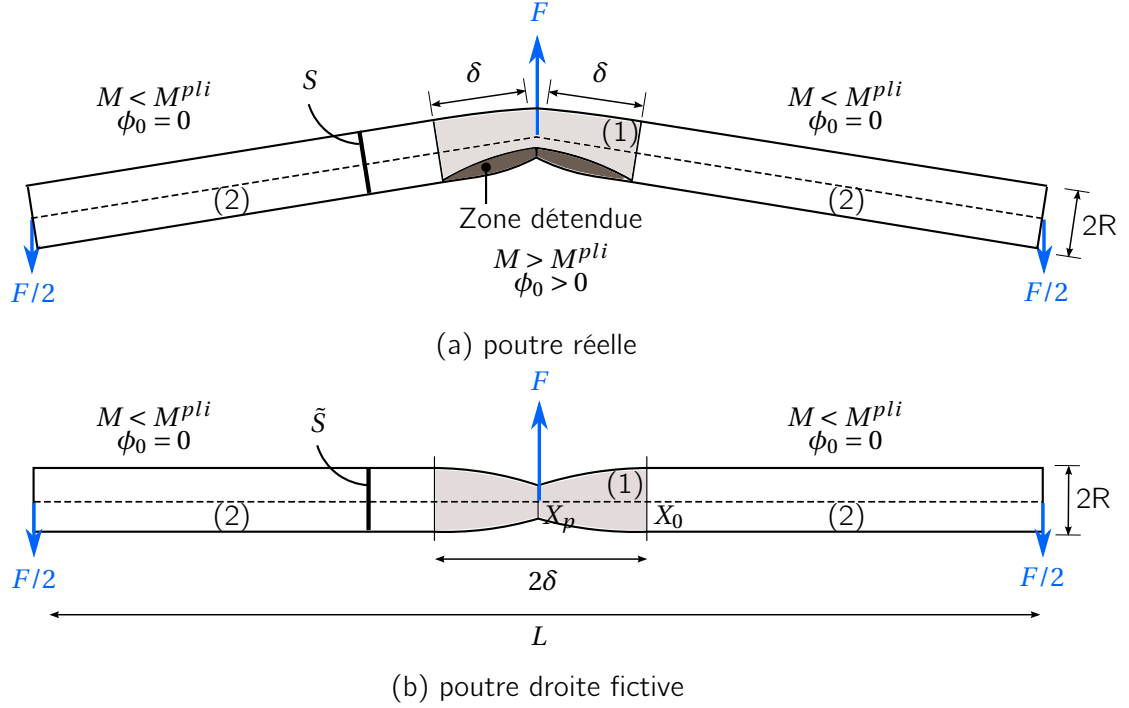


Fig. 2.18 – Construction du modèle analytique.

On note S une section de la poutre réelle, son rayon est R et son moment quadratique est I . On note $\tilde{S}$ une section de la poutre droite fictive équivalente, son rayon est alors $\tilde{R}$ et son moment quadratique $\tilde{I}$. Sur la seconde zone, notée (2), on a :

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= R \\ \tilde{S} &= S \\ \tilde{I} &= I\end{aligned}\tag{2.84}$$

On note $\tilde{\Sigma}_{xx}$ la répartition de la contrainte sur la section fictive. La résultante du champ de contrainte $\tilde{\Sigma}_{xx}$ sur la section fictive $\tilde{S}$ est égale à la résultante du champ de contrainte Σ_{xx} sur la section S associée de même que le moment de flexion M .

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{S}} \tilde{\Sigma}_{xx} d\tilde{S} &= p\pi R^2 \\ -\int_{\tilde{S}} y \tilde{\Sigma}_{xx} d\tilde{S} &= M\end{aligned}\tag{2.85}$$

On cherche une expression pour la section équivalente. La contrainte dans la zone (1) de la poutre réelle est donnée par l'équation (2.56). Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma_{xx} = \frac{\pi}{\pi - \phi_0 + \tan \phi_0} \left(-\frac{p}{2\cos \phi_0 H} R \cos \phi + \frac{pR}{2H} \right)\tag{2.86}$$

et la contrainte dans la zone (2) de la poutre réelle est donnée par l'équation (2.50). La continuité en X_0 permet d'établir une analogie. On propose une expression pour le moment quadratique de la section pliée $\tilde{I}$:

$$\frac{p}{2\cos \phi_0 H} = \frac{M}{\tilde{I}}\tag{2.87}$$

L'utilisation de l'équation (2.60) conduit à l'expression suivante :

$$\tilde{I} = \frac{\pi - \phi_0 + \cos\phi_0 \sin\phi_0}{\pi - \phi_0 + \tan\phi_0} I \quad (2.88)$$

On utilise cette expression du moment quadratique fictif pour construire la section fictive. En supposant que la section fictive est circulaire de rayon $\tilde{R}$ et d'épaisseur H ,

$$\tilde{I} = \pi \tilde{R}^3 H \quad (2.89)$$

En remplaçant $\tilde{I}$ par l'expression donnée par l'équation (2.88), le rayon de la poutre fictive $\tilde{R}$ est :

$$\tilde{R} = \left(\frac{\pi - \phi_0 + \cos\phi_0 \sin\phi_0}{\pi - \phi_0 + \tan\phi_0} \right)^{1/3} R \quad (2.90)$$

la section fictive est alors :

$$\tilde{S} = 2\pi \tilde{R} H = \left(\frac{\pi - \phi_0 + \cos\phi_0 \sin\phi_0}{\pi - \phi_0 + \tan\phi_0} \right)^{1/3} S \quad (2.91)$$

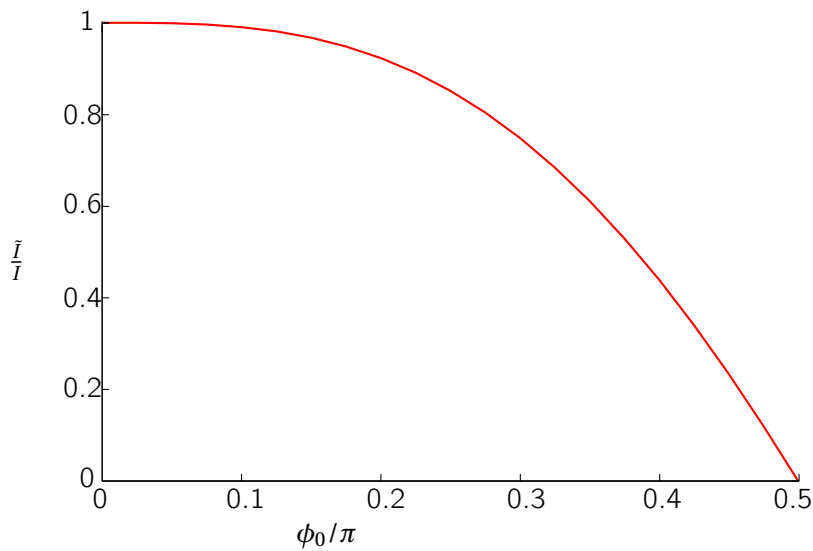


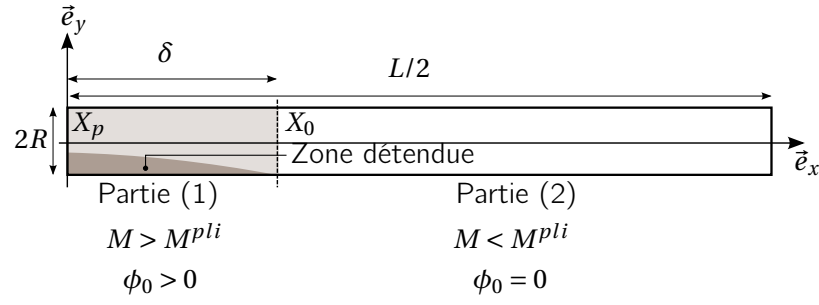
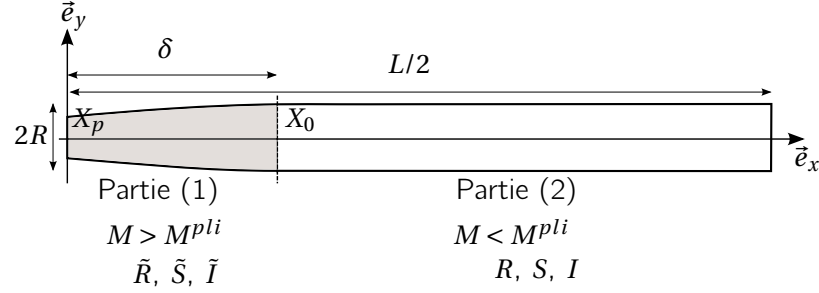
Fig. 2.19 – Évolution du quadratique de la section fictive adimensionné en fonction de l'angle ϕ_0 .

L'évolution du moment quadratique fictif $\tilde{I}$ en fonction du rapport ϕ_0/π est tracée sur la figure 2.19. Le moment quadratique fictif $\tilde{I}$ s'annule lorsque l'angle ϕ_0 tend vers $\pi/2$ (fig. 2.19). La section n'a alors plus de rigidité. Ce résultat est cohérent avec l'angle ϕ_0 obtenu à la ruine.

2.4.3 Intégration des équations d'équilibre

On considère la partie droite de la poutre biappuyée (*i.e.* $L/2 \leq X \leq L$). En considérant la présence de la zone détendue (fig. 2.17), la demi-poutre se décompose en deux parties définies sur la figure 2.20 : sur la partie (1), les sections sont partiellement déchargées ($\phi_0 > 0$ et $M > M^{pli}$) et les contraintes ne sont transmises que par la partie active tandis que sur la partie (2), les efforts sont transmis par l'intégralité de la section ($\phi_0 = 0$ et $M < M^{pli}$). La demi-poutre est modélisée par une poutre fictive à section variable, sur la figure 2.21, en utilisant le modèle présenté précédemment.

On distingue deux comportements différents sur chacune des parties. Dans le cas présent (poutre biappuyée soumise à une charge ponctuelle supérieure à la charge de pli en son milieu). Les hypothèses sont :


 Fig. 2.20 – Décomposition de la demi-poutre ($L/2 \leq X \leq L$) en deux parties.

 Fig. 2.21 – Décomposition de la demi-poutre fictive ($L/2 \leq X \leq L$) en deux parties.

- Les équations d'équilibre [Ngu14] obtenues après linéarisation du modèle en grandes déformations (cf éq. (2.18), (2.19) et (2.17)) et appliquées au cas de la poutre biappuyée restent valables sur la partie (2). Soit V_2 le déplacement sur la partie (2) et θ_2 la rotation de section sur la partie (2),

$$\left(E_\ell + \frac{P}{S}\right) I \frac{d^2 \theta_2}{dX^2} = \frac{F}{2} \quad (2.92)$$

$$\frac{dV_2}{dX} - \theta_2 = -\frac{F}{2(P + kG_{\ell t} S)} \quad (2.93)$$

- Le déplacement V_1 et la rotation de section θ_1 de la partie (1) obéissent aux mêmes équations d'équilibre en prenant en compte le moment quadratique fictif $\tilde{I}$, le rayon fictif $\tilde{R}$, et la section fictive $\tilde{S}$. Les équations (2.92) et (2.93) deviennent alors sur la partie (1) :

$$\left(E_\ell + \frac{\tilde{P}}{\tilde{S}}\right) \tilde{I} \frac{d^2 \theta_1}{dX^2} = \frac{F}{2} \quad (2.94)$$

$$\frac{dV_1}{dX} - \theta_1 = -\frac{F}{2(\tilde{P} + kG_{\ell t} \tilde{S})} \quad (2.95)$$

Pour alléger les notations, on définit les grandeurs $\widetilde{(EI)}_P$ et $\widetilde{(kGS)}_P$ telles que :

$$\widetilde{(EI)}_P = \left(E_\ell + \frac{\tilde{P}}{\tilde{S}}\right) \tilde{I} \quad (2.96)$$

et

$$\widetilde{(kGS)}_P = (\tilde{P} + kG_{\ell t} \tilde{S}) \quad (2.97)$$

$\widetilde{(EI)}_P$ et $\widetilde{(kGS)}_P$ sont des fonctions de X sur la partie (1). Le calcul du déplacement $V_1(X)$ et de la rotation $\theta_1(X)$ nécessite d'identifier les fonctions $\widetilde{(EI)}_P(X)$ et $\widetilde{(kGS)}_P(X)$, or les grandeurs $\tilde{I}$, $\tilde{R}$ et $\tilde{S}$ sont exprimées en fonction de ϕ_0 (cf équations (2.88), (2.90) et (2.91)). La relation entre ϕ_0 et X n'est pas triviale, elle peut être obtenue à partir de l'expression du moment de flexion M et de la relation entre le moment de flexion M et l'angle du pli ϕ_0 (cf équation 2.60). Une telle démarche aboutit sur une relation complexe entre X et ϕ_0 ,

difficilement intégrable analytiquement. On envisage donc une approximation. Trois approches sont proposées pour l'intégration des équations d'équilibre (2.94) et (2.95) sur la demi-longueur $\delta = X_0 - X_p$ (fig. 2.20) :

- $(\widetilde{EI})_p$ et $(\widetilde{kGS})_p$ varient linéairement entre $X = X_p$ et $X = X_0$, cette forme est la plus simple, ce qui permet d'effectuer une première approximation.
- $(\widetilde{EI})_p$ a une évolution quadratique et $(\widetilde{kGS})_p$ a une évolution linéaire entre $X = X_p$ et $X = X_0$. La forme quadratique est plus naturelle pour la continuité de la solution. On propose ce cas pour quantifier l'écart entre une intégration linéaire et une intégration quadratique. Ce changement est uniquement effectué sur le terme de flexion qui est prépondérant dans ce problème.
- $(\widetilde{EI})_p$ et $(\widetilde{kGS})_p$ ont une évolution quadratique entre $X = X_p$ et $X = X_0$. Cette dernière approche permet de quantifier l'influence du terme de cisaillement sur la solution.

Intégration Linéaire-Linéaire

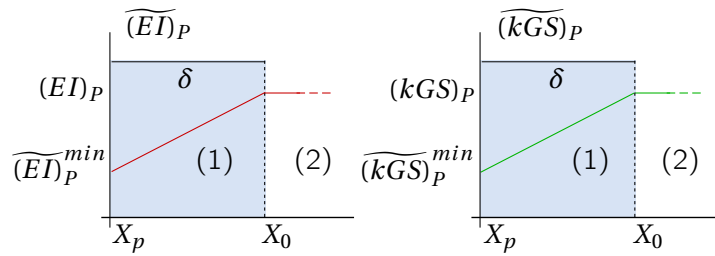


Fig. 2.22 – Représentation des rigidités $(\widetilde{EI})_p$ et $(\widetilde{kGS})_p$ dans la zone détendue pour l'intégration linéaire-linéaire.

Soient les évolutions suivantes de $(\widetilde{EI})_p$ et $(\widetilde{kGS})_p$, représentées sur la figure 2.22 :

$$\begin{cases} (\widetilde{EI})_p(X) = \alpha_1 X + \beta_1 \\ (\widetilde{kGS})_p(X) = \alpha_2 X + \beta_2 \end{cases} \quad (2.98)$$

Les valeurs des constantes α_1 , α_2 , β_1 et β_2 sont déterminées à partir des valeurs aux limites.

$$\begin{cases} (\widetilde{EI})_p(X_0) = \alpha_1 X_0 + \beta_1 = (EI)_p \\ (\widetilde{EI})_p(X_p) = \alpha_1 X_p + \beta_1 = (EI)_p^{min} \end{cases} \quad (2.99)$$

et

$$\begin{cases} (\widetilde{kGS})_p(X_0) = \alpha_2 X_0 + \beta_2 = (kGS)_p \\ (\widetilde{kGS})_p(X_p) = \alpha_2 X_p + \beta_2 = (kGS)_p^{min} \end{cases} \quad (2.100)$$

la résolution des systèmes mène à :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{(EI)_p - (EI)_p^{min}}{\delta} \\ \beta_1 = (EI)_p^{min} - \frac{(EI)_p - (EI)_p^{min}}{\delta} X_0 \end{cases} \quad (2.101)$$

et

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{(kGS)_p - (kGS)_p^{min}}{\delta} \\ \beta_2 = (kGS)_p^{min} - \frac{(kGS)_p - (kGS)_p^{min}}{\delta} X_0 \end{cases} \quad (2.102)$$

L'équation (2.94) s'écrit :

$$\frac{d^2 \theta_1}{dX^2} = \frac{F}{2(\widetilde{EI})_p(X)} = \frac{F}{2} \frac{1}{\alpha_1 X + \beta_1} \quad (2.103)$$

le quotient $\frac{1}{\alpha_1 X + \beta_1}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\alpha_1 X + \beta_1} = \frac{\frac{1}{\alpha_1}}{X + \frac{\beta_1}{\alpha_1}} = \frac{C_1}{X - X_f} \quad (2.104)$$

avec,

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\alpha_1} \\ X_f = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \end{cases} \quad (2.105)$$

En intégrant une première fois, on trouve :

$$\frac{d\theta_1}{dX} = \frac{F}{2} (C_1 \ln|X - X_f| + \varepsilon_1) \quad (2.106)$$

L'expression de la dérivée de la rotation de la section sur la partie (2) $d\theta_2/dx$ est déterminée en intégrant l'équation (2.92) :

$$\frac{d\theta_2}{dX} = \frac{F}{2(E + P/S)I} X + \varepsilon'_1 \quad (2.107)$$

$d\theta_2/dx$ est nulle en $X = L$ et par conséquent,

$$\varepsilon'_1 = -\frac{FL}{2(E + P/S)I} \quad (2.108)$$

la continuité de la solution en $X = X_0$ permet d'écrire :

$$\frac{d\theta_1}{dX}(X = X_0) = \frac{d\theta_2}{dX}(X = X_0) \quad (2.109)$$

d'où

$$\varepsilon_1 = \frac{X_0 - l}{(E + P/S)I} - C_1 \ln|X_0 - X_f| \quad (2.110)$$

Les rotations de la section θ_1 sur la partie (1) et θ_2 sur la partie (2) sont obtenues en intégrant les équations (2.106) et (2.107) :

$$\theta_1(X) = \frac{F}{2} ((X - X_f)C_1 (\ln|X - X_f| - 1) + \varepsilon_1 X + \varepsilon_2) \quad (2.111)$$

$$\theta_2(X) = \frac{F}{2(E + P/S)I} \left(\frac{X^2}{2} - LX \right) + \varepsilon_3 \quad (2.112)$$

En $X = X_p = L/2$ (X_p appartient à la partie (1)) la rotation est nulle :

$$\varepsilon_2 = -(X_p - X_f)C_1 (\ln|X_p - X_f| - 1) - \varepsilon_1 X_0 \quad (2.113)$$

la continuité de la solution en $X = X_0$ impose :

$$\theta_1(X = X_0) = \theta_2(X = X_0) \quad (2.114)$$

et donc,

$$\varepsilon_3 = \frac{F}{2} \left((X_0 - X_f)C_1 (\ln|x_0 - x_f| - 1) + \varepsilon_1 X_0 + \varepsilon_2 - \frac{1}{(EI)_P} \left(\frac{X_0^2}{2} - LX_0 \right) \right) \quad (2.115)$$

Les déplacements $V_1(x)$ sur la partie (1) et $V_2(x)$ sur la partie (2) sont déterminés en intégrant les

équations (2.95) et (2.93).

$$\frac{dV_1}{dX} - \theta_1 = -\frac{F}{2(kGS)_P(X)} \quad (2.116)$$

$$\frac{dV_1}{dX} - \theta_1 = -\frac{F}{2(\alpha_2 X + \beta_2)} \quad (2.117)$$

Comme précédemment, le quotient $\frac{1}{\alpha_2 X + \beta_2}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\alpha_1 X + \beta_2} = \frac{\frac{1}{\alpha_2}}{X + \frac{\beta_2}{\alpha_2}} = \frac{D_1}{X - X_c} \quad (2.118)$$

avec,

$$\begin{cases} D_1 = \frac{1}{\alpha_2} \\ X_c = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{cases} \quad (2.119)$$

en remplaçant $\theta_1(X)$ et $(kGS)_P(X)$ par leurs expressions respectives (éq. (2.111) et (2.97) on détermine l'expression de $V_1(x)$:

$$V_1(x) = -\frac{F}{2} D_1 \ln|X - X_c| + \frac{F}{2} \left(\frac{C_1}{4} (X - X_f)^2 (2 \ln|X - X_f| - 3) + \frac{X^2}{2} \varepsilon_1 + X \varepsilon_2 \right) + \varepsilon_4 \quad (2.120)$$

La déplacement $V_2(X)$ est obtenu en combinant les équations (2.93) et (2.112) :

$$V_2(x) = -\frac{FX}{2(P + kGS)} + \frac{F}{6(E + P/S)I} \left(\frac{X^3}{6} - L \frac{X^2}{2} \right) + \varepsilon_3 X + \varepsilon_5 \quad (2.121)$$

la prise en compte de la condition aux limites $V_2(L) = 0$ permet de déduire :

$$\varepsilon_5 = \frac{FL}{2(P + kGS)} + \frac{FL^3}{6(E + P/S)I} - \varepsilon_3 L \quad (2.122)$$

et le respect de la continuité en X_0 de la déformée :

$$V_1(X = X_0) = V_2(X = X_0) \quad (2.123)$$

mène à :

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 = & -\frac{FX_0}{2(P + kGS)} + \frac{F}{6(E + P/S)I} \left(\frac{X_0^3}{6} - L \frac{X_0^2}{2} \right) + \varepsilon_3 X_0 + \varepsilon_5 \\ & + \frac{F}{2} D_1 \ln|X_0 - X_c| - \frac{F}{2} \left(\frac{C_1}{4} (X_0 - X_f)^2 (2 \ln|X_0 - X_f| - 3) + \frac{X_0^2}{2} \varepsilon_1 + X_0 \varepsilon_2 \right) \end{aligned} \quad (2.124)$$

Intégration Quadratique-Linéaire

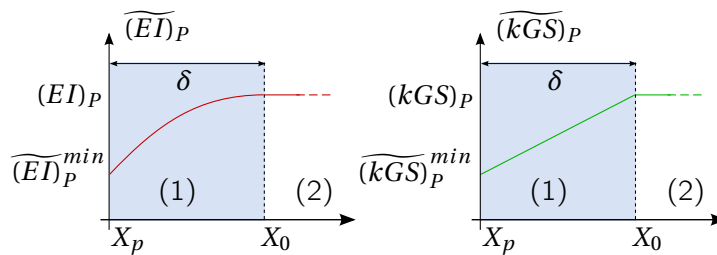


Fig. 2.23 – Représentation des rigidités $(EI)_P$ et $(kGS)_P$ dans la zone détendue pour l'intégration quadratique-linéaire.

Soient les évolutions suivantes de $(\widetilde{EI})_P(X)$ et $(\widetilde{kGS})_P(X)$, représentées sur la figure 2.23 :

$$\begin{cases} \widetilde{(EI)}_P(X) = \alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1 \\ \widetilde{(kGS)}_P(X) = \alpha_2 X + \beta_2 \end{cases} \quad (2.125)$$

Les constantes α_2 et β_2 restent inchangées et sont données par le système (2.102). La détermination des constantes α_1 , β_1 et γ_1 se fait en considérant les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{(EI)}_P(X_0) = \alpha_1 X_0^2 + \beta_1 X_0 + \gamma_1 = (EI)_P \\ \widetilde{(EI)}_P(X_p) = \alpha_1 X_p^2 + \beta_1 X_p + \gamma_1 = (EI)_P^{min} \\ \frac{d(\widetilde{EI})_P}{dX}(X_p) = 2\alpha_1 X_p + \beta_1 = 0 \end{cases} \quad (2.126)$$

En résolvant le système, les constantes sont identifiées.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{(EI)_P^{min} - (EI)_P}{\delta^2} \\ \beta_1 = -2 \frac{(EI)_P^{min} - (EI)_P}{\delta^2} X_0 \\ \gamma_1 = (EI)_P + 2 \frac{(EI)_P^{min} - (EI)_P}{\delta^2} X_0^2 \end{cases} \quad (2.127)$$

L'équation (2.94) s'écrit :

$$\frac{d^2\theta_1}{dX^2} = \frac{F}{2(\widetilde{EI})_P(X)} = \frac{F}{2} \frac{1}{\alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1} \quad (2.128)$$

le quotient $\frac{1}{\alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1}$ peut se décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{\alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1} = \frac{C_1}{X - X_f^1} + \frac{C_2}{X - X_f^2} \quad (2.129)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes et X_f^1 et X_f^2 les racines du polynôme $\alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1$. On note $\Delta_f = \beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1$ le discriminant, les racines du polynôme sont alors :

$$\begin{cases} X_f^1 = \frac{-\beta_1 - \sqrt{\Delta_f}}{2\alpha_1} \\ X_f^2 = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\Delta_f}}{2\alpha_1} \end{cases} \quad (2.130)$$

et en développant le terme à droite de l'équation (2.129), les constantes C_1 et C_2 sont identifiées comme :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_f}} \\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_f}} \end{cases} \quad (2.131)$$

En intégrant une première fois l'équation (2.94), on trouve :

$$\frac{d\theta_1}{dX} = \frac{F}{2} \left(C_1 \ln|X - X_f^1| + C_2 \ln|X - X_f^2| + \varepsilon_1 \right) \quad (2.132)$$

L'expression de la dérivée de la rotation de la section sur la partie (2) $d\theta_2/dX$ est déterminée en intégrant l'équation (2.107). L'utilisation de la condition de continuité de la solution en $X = X_0$ permet d'établir l'expression de ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{X_0 - L}{(E + P/S)I} - C_1 \ln|X_0 - X_f^1| - C_2 \ln|X_0 - X_f^2| \quad (2.133)$$

La rotation de la section θ_1 sur la partie (1) est obtenue en intégrant l'équation (2.132) :

$$\theta_1(X) = \frac{F}{2} \left((X - X_f^1) C_1 (\ln|X - X_f^1| - 1) + (X - X_f^2) C_2 (\ln|X - X_f^2| - 1) + \varepsilon_1 X + \varepsilon_2 \right) \quad (2.134)$$

La prise en compte de la condition $\theta_1(X_p) = 0$ mène à l'expression de ε_2 .

$$\varepsilon_2 = -(X_p - X_f^1) C_1 (\ln|X_p - X_f^1| - 1) - (X_p - X_f^2) C_2 (\ln|X_p - X_f^2| - 1) - \varepsilon_1 X_0 \quad (2.135)$$

La rotation de la section sur la partie (2) est donnée par l'équation (2.112), la continuité de la solution en $X = X_0$ impose la valeur de ε_3 :

$$\varepsilon_3 = \frac{F}{2} \left((X_0 - X_f^1) C_1 (\ln|X_0 - X_f^1| - 1) + (X_0 - X_f^2) C_2 (\ln|X_0 - X_f^2| - 1) + \varepsilon_1 X_0 + \varepsilon_2 - \frac{1}{(EI)_P} \left(\frac{X_0^2}{2} - L X_0 \right) \right) \quad (2.136)$$

Le déplacement V_1 est identifié en intégrant l'équation (2.95), et en considérant les résultats de l'intégration linéaire de $(\widetilde{kGS})_P$ de l'équation (2.120) :

$$\begin{aligned} V_1(x) = & -\frac{F}{2} D_1 \ln|X - X_c| \\ & + \frac{F}{2} \left(\frac{C_1}{4} (X - X_f^1)^2 (2\ln|X - X_f^1| - 3) + \frac{C_2}{4} (X - X_f^2)^2 (2\ln|X - X_f^2| - 3) + \frac{X^2}{2} \varepsilon_1 + X \varepsilon_2 \right) \\ & + \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (2.137)$$

La déplacement V_2 est régit par l'équation (2.120) et le respect de la continuité en X_0 de la solution aboutit à l'identification de ε_4 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 = & -\frac{F X_0}{2(P+kGS)} + \frac{F}{6(E+P/S)I} \left(\frac{X_0^3}{6} - L \frac{X_0^2}{2} \right) + \varepsilon_3 X_0 + \varepsilon_5 + \frac{F}{2} D_1 \ln|X_0 - X_c| \\ & - \frac{F}{2} \left(\frac{C_1}{4} (X_0 - X_f^1)^2 (2\ln|X_0 - X_f^1| - 3) + \frac{C_2}{4} (X_0 - X_f^2)^2 (2\ln|X_0 - X_f^2| - 3) \right) \frac{X_0^2}{2} \varepsilon_1 + X_0 \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.138)$$

Intégration Quadratique-Quadratique

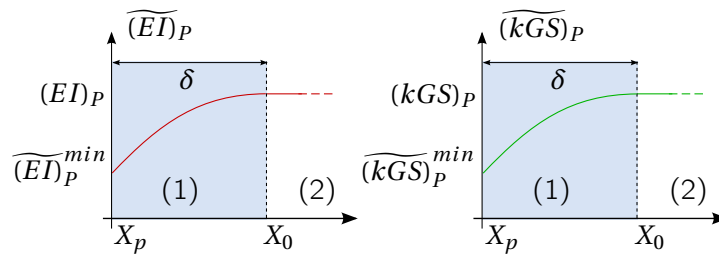


Fig. 2.24 – Représentation des rigidités $(EI)_P$ et $(kGS)_P$ dans la zone détendue pour l'intégration quadratique-quadratique.

Soient les évolutions suivantes de $(EI)_P(X)$ et $(kGS)_P(X)$ représentées sur la figure 2.24 :

$$\begin{cases} (\widetilde{EI})_P(X) = \alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1 \\ (\widetilde{kGS})_P(X) = \alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2 \end{cases} \quad (2.139)$$

Les constantes α_1 , β_1 et γ_1 restent inchangées et sont données par le système (2.127). La détermination

des constantes α_2 , β_2 et γ_1 se fait en considérant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} (\overline{kGS})_P(X_0) = \alpha_2 X_0^2 + \beta_2 X_0 + \gamma_2 = (kGS)_P \\ (\overline{kGS})_P(X_p) = \alpha_2 X_p^2 + \beta_2 X_p + \gamma_2 = (kGS)_P^{min} \\ \frac{d(\overline{kGS})_P}{dX}(X_p) = 2\alpha_2 X_p + \beta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.140)$$

En résolvant le système, les constantes sont identifiées.

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{(kGS)_P^{min} - (kGS)_P}{\delta^2} \\ \beta_2 = -2 \frac{(kGS)_P^{min} - (kGS)_P}{\delta^2} X_0 \\ \gamma_2 = (kGS)_P + 2 \frac{(kGS)_P^{min} - (kGS)_P}{\delta^2} X_0^2 \end{cases} \quad (2.141)$$

L'intégration de l'équation d'équilibre (2.94) reste inchangée par rapport à l'intégration quadratique-linéaire et la rotation de la section θ_1 est donnée par l'équation (2.134). Les constantes ε_1 , ε_2 et ε_3 sont également conservées.

$$\varepsilon_1 = \frac{X_0 - L}{(E + P/S)I} - C_1 \ln|X_0 - X_f^1| - C_2 \ln|X_0 - X_f^2| \quad (2.142)$$

$$\varepsilon_2 = -(X_p - X_f^1)C_1(\ln|X_p - X_f^1| - 1) - (X_p - X_f^2)C_2(\ln|X_p - X_f^2| - 1) - \varepsilon_1 X_0 \quad (2.143)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{F}{2} \left((X_0 - X_f^1)C_1(\ln|X_0 - X_f^1| - 1) + (X_0 - X_f^2)C_2(\ln|X_0 - X_f^2| - 1) + \varepsilon_1 X_0 + \varepsilon_2 - \frac{1}{(EI)_P} \left(\frac{X_0^2}{2} - LX_0 \right) \right) \quad (2.144)$$

Seule l'intégration de l'équation d'équilibre (2.95) est modifiée. On a :

$$\frac{dV_1}{dX} - \theta_1 = -\frac{F}{2(\overline{kGS})_P(X)} = -\frac{F}{2(\alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2)} \quad (2.145)$$

le quotient $\frac{1}{\alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2}$ se décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{\alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2} = \frac{D_1}{X - X_c^1} + \frac{D_2}{X - X_c^2} \quad (2.146)$$

où D_1 et D_2 sont des constantes et X_c^1 et X_c^2 les racines du polynôme $\alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2$. On note $\Delta_c = \beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2$ le discriminant, les racines du polynôme sont alors :

$$\begin{cases} X_c^1 = \frac{-\beta_2 - \sqrt{\Delta_c}}{2\alpha_2} \\ X_c^2 = \frac{-\beta_2 + \sqrt{\Delta_c}}{2\alpha_2} \end{cases} \quad (2.147)$$

et les constantes D_1 et D_2 sont identifiées comme :

$$\begin{cases} D_1 = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_c}} \\ D_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta_c}} \end{cases} \quad (2.148)$$

Le déplacement V_1 est alors :

$$\begin{aligned} V_1(X) = & -\frac{F}{2} (D_1 \ln|X - X_c^1| + D_2 \ln|X - X_c^2|) + \frac{F}{2} \left(\frac{C_1}{4} (X - X_f^1)^2 (2\ln|X - X_f^1| - 3) \right. \\ & \left. + \frac{C_2}{4} (X - X_f^2)^2 (2\ln|X - X_f^2| - 3) + \frac{X^2}{2} \varepsilon_1 + X \varepsilon_2 \right) + \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (2.149)$$

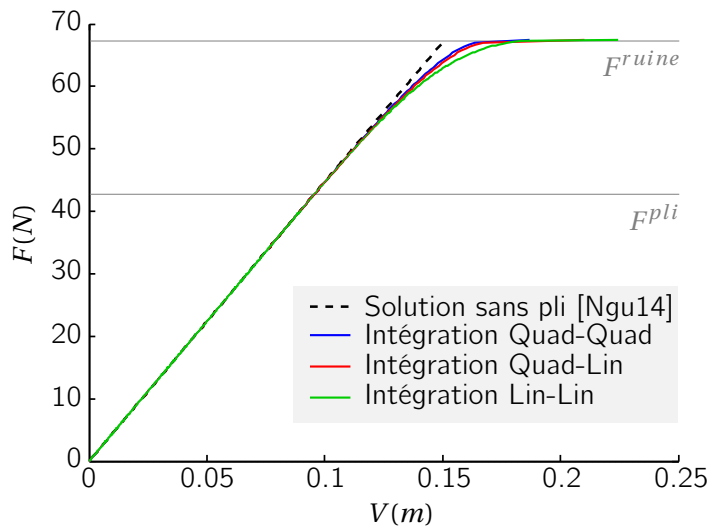
Le déplacement V_2 est régit par l'équation (2.120) et le respect la continuité en X_0 de la solution aboutit à l'identification de ε_4 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 = & -\frac{FX_0}{2(P+kGS)} + \frac{F}{6(E+P/S)I} \left(\frac{X_0^3}{6} - L\frac{X_0^2}{2} \right) + \varepsilon_3 X_0 + \varepsilon_5 \\ & + \frac{F}{2} (D_1 \ln|X_0 - X_c^1| + D_2 \ln|X_0 - X_c^2|) \\ & - \frac{F}{2} \left(\frac{C_1}{4} (X_0 - X_f^1)^2 (2\ln|X_0 - X_f^1| - 3) + \frac{C_2}{4} (X_0 - X_f^2)^2 (2\ln|X_0 - X_f^2| - 3) \frac{X_0^2}{2} \varepsilon_1 + X_0 \varepsilon_2 \right) \end{aligned} \quad (2.150)$$

Tab. 2.1 – Données utilisées pour le calcul du déplacement par le modèle développé

Configuration de référence	R(m)	L(m)	p (bar)	$E_\ell H$ (N/m)	$G_{\ell t} H$
initiale Ω_0 (pressurisée)	0,103	4	0,25	$2,09 \cdot 10^5$	$5,27 \cdot 10^3$

La flèche en $X = L/2$ est tracée sur la figure 2.25 pour les trois modèles d'intégration des termes $(\widetilde{EI})_P$ et $(\widetilde{kGS})_P$. Les charges de pli F^{pli} et de ruine F^{ruine} sont calculées à partir des équations (2.153) et (2.154) et indiquées sur la figure. On considère les dimensions de la poutre biappuyée considérée jusqu'à présent. Il faut prendre en compte les variations géométriques et matérielles dues à la pressurisation avant d'utiliser le modèle. Ces variations sont calculées par les équations (2.4) et (2.6). Les données appliquées au modèle sont précisées dans le tableau 2.1. Sur la figure 2.25, la courbe correspondant à l'intégration linéaire-linéaire est en vert, la courbe correspondant à l'intégration quadratique-linéaire en rouge et la courbe correspondant à l'intégration quadratique-quadratique en bleu. La comparaison des trois courbes montre une très grande proximité entre les trois modèles. La non-linéarité due au pli (par rapport à la solution sans pli tracée en noir) apparaît dans les 3 cas. On remarque aussi que le critère défini pour la ruine par l'équation 2.40 dans la littérature est respecté. On choisit pour la suite de travailler avec le modèle le plus simple qui est l'intégration linéaire des deux termes $(\widetilde{EI})_P$ et $(\widetilde{kGS})_P$.


Fig. 2.25 – Tracé de la flèche en $X = L/2$ pour les trois modèles d'intégration et comparaison avec la solution en cas d'absence du pli.

2.5 Étude numérique d'une poutre en flexion

2.5.1 Description du problème

On considère une poutre pressurisée à $p = 0,25$ bar, de longueur $L = 4$ m et de rayon $R = 0,103$ m à la fin de l'étape de gonflage, l'épaisseur de la paroi est notée H . La poutre est biappuyée et soumise à une charge ponctuelle F en son milieu comme schématisé sur la figure 2.26. Le matériau choisi est le Précontraint

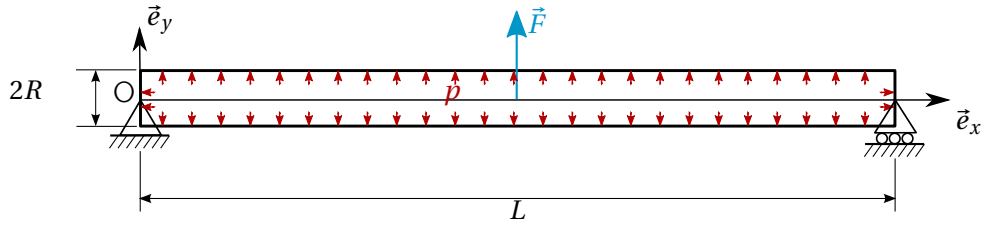


Fig. 2.26 – Représentation du problème mécanique à résoudre.

F302, supposé orthotrope, dont les propriétés mécaniques en configuration naturelle ont été caractérisées par Nguyen [Ngu14] : $\phi E_{\ell}H = \phi E_tH = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $\phi G_{\ell t}H = 5,2 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ et $\phi \nu_{\ell t} = \phi \nu_{t\ell} = 0,2$. Bien que le moment de ruine soit indépendant des propriétés mécaniques, il est important de prendre en compte l'orthotropie pour le calcul de la configuration initiale. L'expression du moment de flexion dans la structure est directement issue de la méthode des coupures :

$$\begin{cases} M = F \frac{X}{2} & \text{si } X \in [0, L/2] \\ M = \frac{F}{2}(L - X) & \text{si } X \in [L/2, L] \end{cases} \quad (2.151)$$

Il apparaît clairement que le moment de flexion le plus important intervient en $X = L/2$, c'est donc dans cette section qu'apparaîtra le premier pli. La relation entre F et M en $x = L/2$, sur la configuration initiale est donnée par :

$$M = \frac{FL}{4} \quad (2.152)$$

En raisonnant sur la configuration initiale (Ω_0), l'équation 2.152 demeure valide jusqu'à la ruine. L'utilisation des équations (2.51) et (2.72) permet d'obtenir l'expression des charges de pli et de ruine exprimées en force et notée respectivement F_{th}^{pli} et F_{th}^{ruine} .

$$F_{th}^{pli} = \frac{p\pi R^3}{2} \quad (2.153)$$

$$F_{th}^{ruine} = \frac{p\pi^2 R^3}{4} \quad (2.154)$$

Application : Dans l'étude proposée l'application numérique donne une force de plissage $F_{th}^{pli} = 42,9 \text{ N}$ et une force de ruine $F_{th}^{ruine} = 67,4 \text{ N}$.

2.5.2 Modélisation Numérique

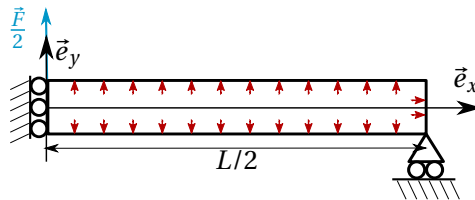


Fig. 2.27 – Prise en compte des symétries dans le modèle numérique.

Le problème mécanique considéré sur la figure 2.26 présente deux plans de symétrie. Le plan $\mathcal{P}_1$ est défini par l'équation $X = L/2$ et le plan $\mathcal{P}_2$ est défini par l'équation $Z = 0$. Seul un quart de la poutre est maillé. La modélisation retenue est schématisée sur la fig 2.27. Elle consiste à imposer des conditions de symétrie dans les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$: Soit $M(X, Y, Z)$ un point quelconque dont le déplacement est noté $\vec{U}(X, Y, Z) = U(X, Y, Z)\vec{e}_x + V(X, Y, Z)\vec{e}_y + W(X, Y, Z)\vec{e}_z$, les conditions limites s'écrivent alors :

$$U(X, Y, Z) = 0 \text{ si } M \in \mathcal{P}_1 \quad (2.155)$$

$$W(X, Y, Z) = 0 \text{ si } M \in \mathcal{P}_2 \quad (2.156)$$

Le mouvement de corps rigide est bloqué au centre de la section située en $X = L/2$, ce point étant situé sur la ligne neutre, par la condition aux limites :

$$Y(L/2, 0, 0) = 0 \quad (2.157)$$

Le chargement $F/2$ est appliqué sur les n nœuds $M(X, Y, Z)$ du contour $\partial\Omega_f$ défini par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y \leq 0 \\ Z \geq 0 \end{cases} \quad (2.158)$$

L'amplitude F_i de la force à appliquer est la même pour chacun des n nœuds du contour $\partial\Omega_f$ à l'exception du nœuds appartenant au plan $\mathcal{P}_2$ indicé 1, en raison de la symétrie, l'amplitude de la force F_1 à appliquer sur ce nœud correspond à la moitié de l'amplitude $F_{i=2,n} = F_2$ à appliquer sur les autres nœud de $\partial\Omega_f$. Ceci est traduit mathématiquement par le système suivant :

$$\begin{cases} (n-1)F_2 + F_1 = F/2 \\ F_1 = F_2/2 \end{cases} \quad (2.159)$$

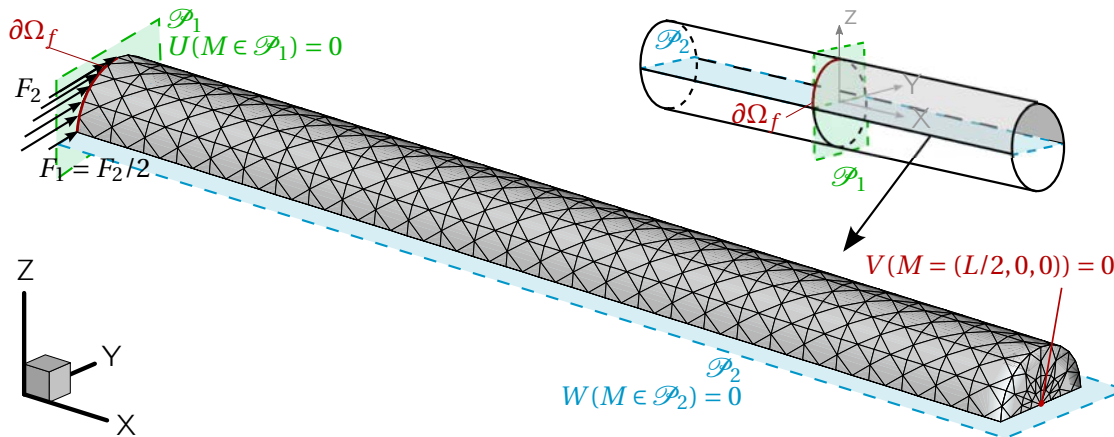


Fig. 2.28 – Application des conditions limites et du chargement sur un maillage 3D.

Ce sont les valeurs du rayon R_ϕ et de la longueur L_ϕ en configuration naturelle qu'il faut prendre en compte lors de la construction du maillage. Ces valeurs peuvent être obtenues à partir du système d'équations (2.5), ce qui donne $R_\phi \simeq 0,102$ m et $L_\phi \simeq 4$ m.

Les données du problème en configuration initiale sont résumées dans le tableau 2.2.

Tab. 2.2 – Données utilisées pour le calcul par éléments finis

Configuration de référence	R(m)	L(m)	p (bar)	$E_\ell H$ (N/m)	$G_{\ell t} H$
naturelle Ω_ϕ	0,102 (R_ϕ)	4 (L_ϕ)	0,25	$2,1 \cdot 10^5$ ($^\phi E_\ell H_\phi$)	$5,2 \cdot 10^3$ ($^\phi G_{\ell t} H_\phi$)

2.5.3 Résultats

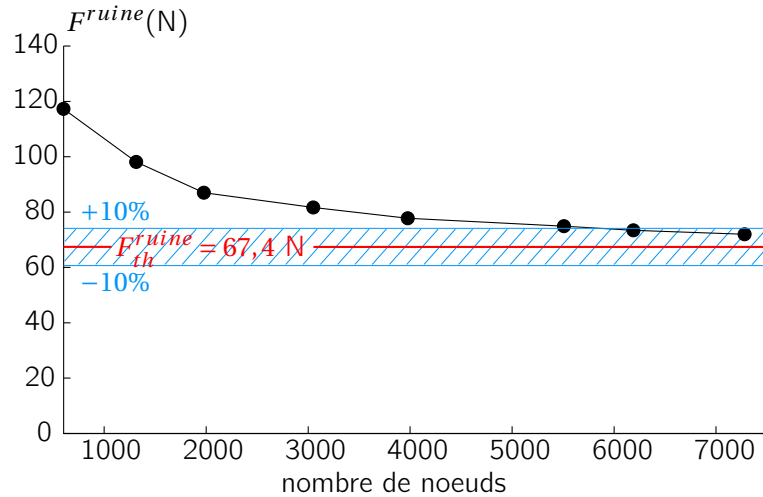
Détermination numérique de la charge de ruine

Le comportement post-plissage de la poutre est fortement non-linéaire, ce qui nécessite l'utilisation de maillages fins. La qualité du résultat final dépend du niveau de raffinement. On s'intéresse donc à la

Tab. 2.3 – Détails des maillages utilisés

Nom maillage	Nombre de nœuds	Nombre d'éléments
M601	601	180
M1313	1313	410
M1977	1977	624
M3051	3051	976
M3977	3977	1278
M5509	5509	1782
M6481	6481	2106
M7281	7281	2366

convergence du résultat obtenu pour la charge de ruine en fonction du nombre d'éléments. On utilise huit maillages (tab. 2.3) qui comportent de 601 à 7281 nœuds. On remarque sur la figure 2.29, qui montre la convergence de la solution, que des maillages très fins sont nécessaires pour approcher la valeur théorique de la charge de ruine avec un écart inférieur à 10%.

**Fig. 2.29** – Visualisation de la convergence du résultat vers la valeur théorique de 67,4 N.

L'écart entre la valeur prévue théoriquement et le résultat de l'étude numérique peut s'expliquer de deux façons. Le rayon intervient à l'ordre 3 dans l'expression de la charge de ruine : une variation de rayon δR entre la valeur théorique et la valeur obtenue numériquement en fin de gonflage fait apparaître une erreur de $(\delta R)^3$ entre les charges de ruine identifiées ainsi une variation $\delta R = 1\%$ a pour conséquence un écart de 3% sur la charge de ruine, cette erreur est limitée en choisissant rigoureusement le rayon à vide de la poutre de façon à obtenir la valeur attendue du rayon en fin de gonflage. La seconde explication se base sur des aspects de modélisation : à proximité de la ruine, des zones de compression (non prévues par le modèle analytique) apparaissent dans certains éléments ce qui tend à surestimer la rigidité de la structure qui supporte alors une charge légèrement plus importante à la ruine. Ce phénomène est visible sur la figure 2.30 sur laquelle la contrainte principale σ_I de la poutre est tracée pour plusieurs niveaux de chargement. L'échelle est volontairement limitée à 500 N/m pour mettre en évidence la zone détendue. Les contraintes principales sont calculées numériquement en diagonalisant le tenseur des contraintes de Cauchy dans la base naturelle. A l'approche de la ruine, on constate l'apparition de valeurs négatives à gauche dans une zone très hétérogène qui perturbe le résultat final. Cela résulte du fait que les éléments membrane utilisés résistent à la compression.

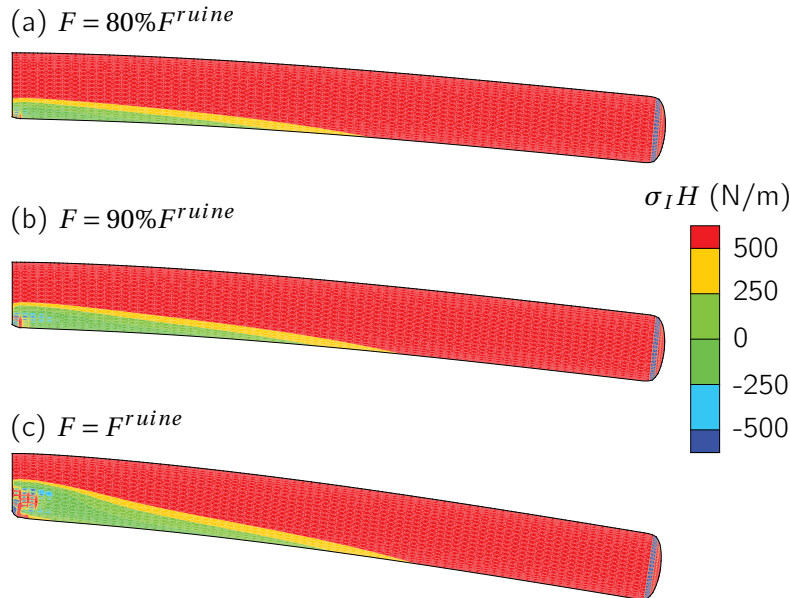


Fig. 2.30 – Visualisation des résultats du calcul de la contrainte principale axiale $\sigma_I H \approx \Sigma_{xx} H$ au voisinage du pli à 80% de la ruine (a), 90% et de la ruine (b), et à la limite de la ruine (c).

L'analyse des résultats expérimentaux est effectuée sur la poutre en configuration déformée. Les contraintes étudiées sont alors les composantes du tenseur de Cauchy. La comparaison avec les contraintes théoriques, exprimées dans la configuration initiale et correspondant ainsi aux composantes du tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce, est pertinente tant que la rotation de la section étudiée reste faible.

Détermination numérique de l'angle maximal $\phi_0 = \pi/2$ de propagation du pli

La visualisation de la contrainte principale σ_I permet de valider l'hypothèse émise sur la condition de ruine : la ruine est atteinte lorsque le pli affecte la moitié de la section. Ce résultat apparaît clairement sur la figure 2.30(c) pour laquelle $F = F^{ruine}$. Ce résultat est important puisqu'il est en adéquation avec les constatations expérimentales de [Tho02] et avec le modèle que nous proposons, à savoir que l'angle maximal de propagation du pli tend vers une valeur $\phi_0 = \pi/2$ à la ruine.

Évolution de la contrainte dans la section pliée

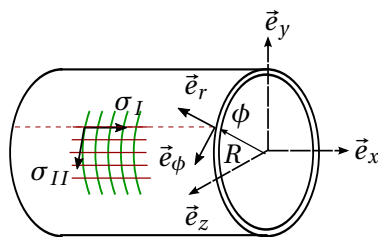


Fig. 2.31 – Représentation des contraintes principales σ_I et σ_{II} sur la configuration initiale.

La figure 2.31 rappelle l'orientation des contraintes principales à l'issue du gonflage, elle sont exprimées à l'aide du tenseur de Cauchy puisque le calcul numérique s'effectue sur la configuration actuelle : la contrainte principale axiale σ_I est égale à Σ_{xx} sur la configuration initiale et la contrainte principale tangentielle σ_{II} est égale à $\Sigma_{\phi\phi}$ sur la configuration initiale. Lorsqu'un chargement de flexion est appliqué, les contraintes principales sont modifiées. Elles coïncident cependant aux contraintes Σ_{xx} et $\Sigma_{\phi\phi}$ aux points de la section située en $X = L/2$ (qui est la section étudiée ici). La contrainte principale tangentielle $\Sigma_{\phi\phi}$ reste constante tout au long du chargement à une valeur égale à $\Sigma_{\phi\phi} = pR$. La validité du critère proposé est directement

liée à celle de l'expression de la contrainte axiale proposée par l'équation (2.56). L'évolution des contraintes principales au point diamétralement opposé au point d'apparition du pli (*i.e.* $\phi = \pi$) dans une section soumise à un moment de flexion M est tracée sur la figure 2.32. Les évolutions analytiques de références Σ_{xx} et $\Sigma_{\phi\phi}$ sont calculées à partir des équations (2.56) et (2.46) respectivement. On remarque que les courbes obtenues par le calcul numérique et les courbes analytiques sont très proches. La charge de pli, qui correspond à l'intersection des courbes représentatives des deux contraintes principales (fig. 2.32), identifiée par le calcul numérique est très proche de la valeur théorique. On constate également qu'au delà de la charge de plissage, les courbes calculées numériquement et par le modèle analytique sont très proches. Notons que la contrainte principale σ_{II} n'est pas parfaitement constante au cours du chargement ce qui signifie que les contraintes principales σ_I et σ_{II} ne sont pas orientées selon les directions $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\phi$ qui définissent les directions de Σ_{xx} et $\Sigma_{\phi\phi}$ dans la configuration initiale. Cette variation traduit l'écart entre les deux configurations (déformée et initiale). Cependant, la différence observée sur les contraintes calculées analytiquement et numériquement à la limite de la ruine demeure très faible, ce qui valide l'hypothèse de calcul sur la configuration initiale.

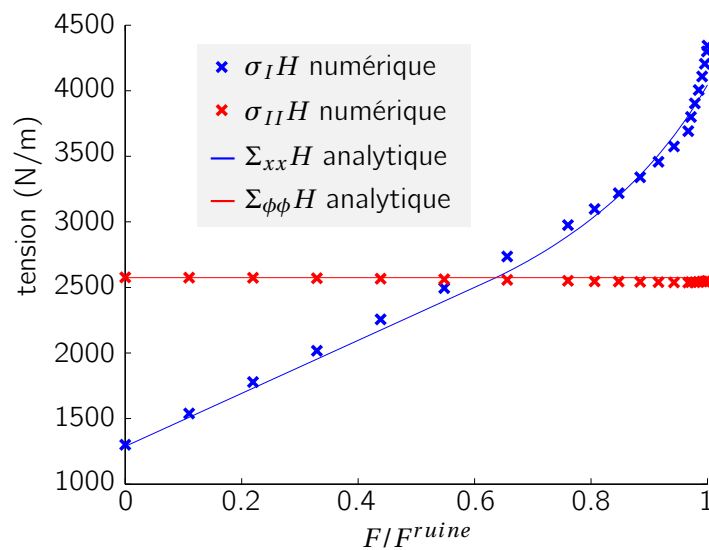


Fig. 2.32 – Comparaison des contraintes principales σ_I et σ_{II} obtenues numériquement avec les contraintes analytiques Σ_{xx} et $\Sigma_{\phi\phi}$ au point diamétralement opposé au point d'apparition du pli (*i.e.* $\phi = \pi$) dans la section $L = L/2$.

La distribution de la contrainte σ_I obtenue par le calcul numérique et la distribution analytique Σ_{xx} le long de la section complète sont représentées et comparées sur la figure 2.33 pour plusieurs niveaux de chargement. Les profils obtenus pour chaque niveau de chargement sont très proches les uns des autres dans la partie active de la section (*i.e.* $\phi > \phi_0$). On remarque un écart entre les amplitudes des courbes issues du calcul numérique et du calcul analytique cohérent avec l'écart observé sur la figure 2.32. L'écart maximal observé est de l'ordre de 6%. Dans la partie inactive de la section (*i.e.* $\phi < \phi_0$), les contraintes issues du calcul numérique ne sont pas nulles contrairement aux contraintes attendues analytiquement. Ce comportement peut s'expliquer par des phénomènes locaux comme la présence de compression dans les éléments membrane ou l'application de la force directement sur ces points. L'étude du profil de la contrainte sur la section (fig. 2.33) confirme une nouvelle fois que la ruine se produit lorsque le pli s'est étendu sur la moitié de la section. Les valeurs de ϕ_0 identifiées pour les trois chargements sont conformes aux valeurs attendues.

Forme de la section active - absence d'ovalisation

La dernière étape de la validation concerne la forme de la section qui est supposée rester circulaire dans la modélisation adoptée (pour la partie active) lors du chargement. On trace le profil de la section au cours

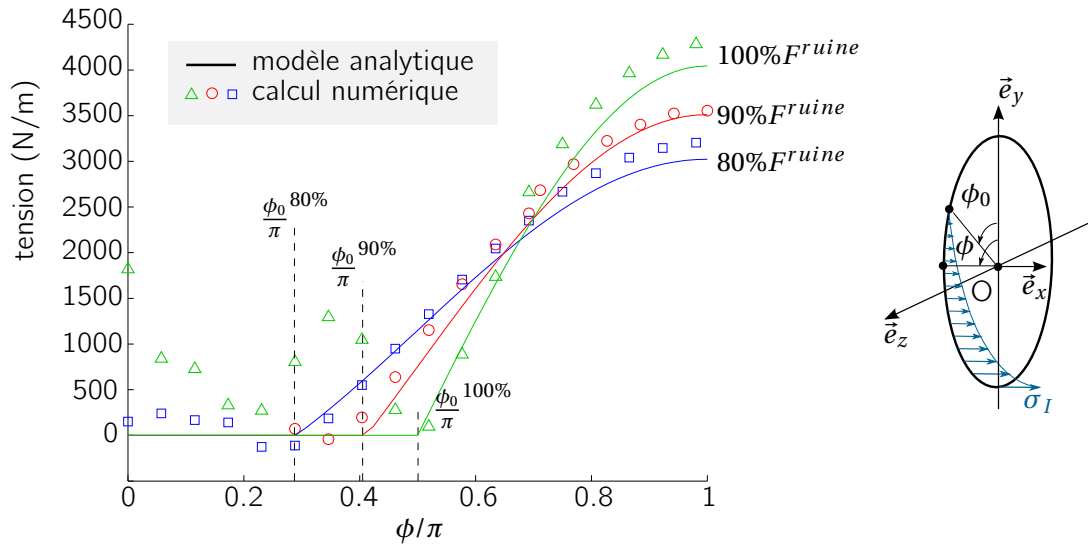


Fig. 2.33 – Comparaison des profils de la contrainte principale axiale obtenus numériquement (σ_I) et théoriquement (Σ_{xx}) le long de la section à plusieurs niveaux de chargement : 80% de la ruine (bleu), 90% de la ruine (rouge), et à la ruine (vert) dans la section $L = L/2$.

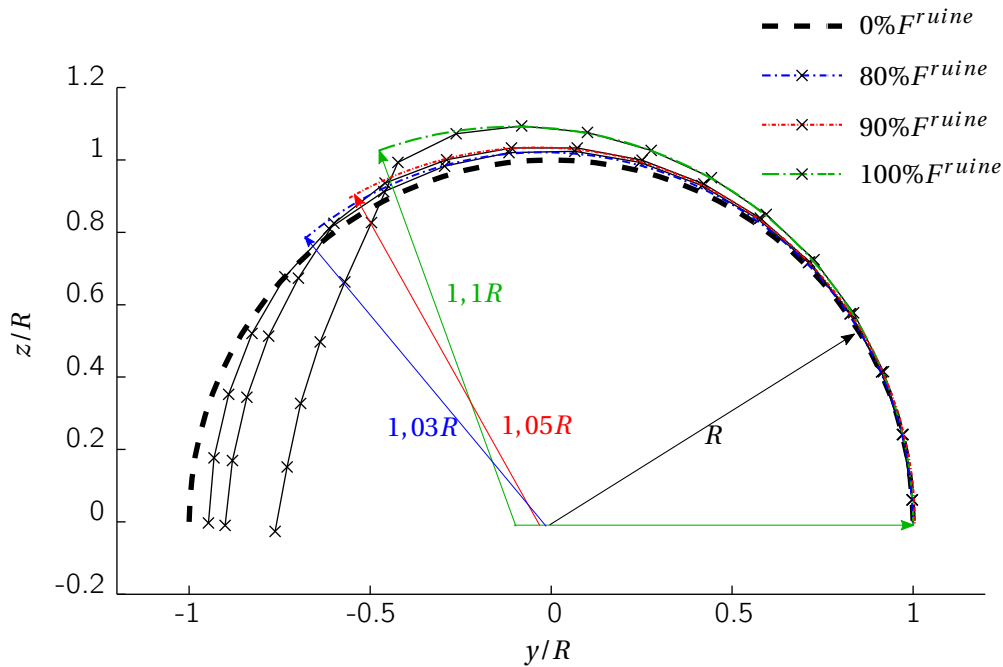


Fig. 2.34 – Mise en évidence de l'absence ovalisation du profil de la partie active de la section (*i.e.* $\Phi > \Phi_0$) au cours du chargement : 80% de la ruine (bleu), 90% de la ruine (rouge), et à la ruine (vert).

du chargement sur la figure 2.34. Le résultat met en lumière une ovalisation très limitée de la section active (*i.e.* $\phi > \phi_0$). Cependant le rayon observé est plus important que le rayon initial. Cette augmentation de rayon est de l'ordre de 10% à la ruine. Cependant l'augmentation du rayon est plus importante à proximité de la ruine (seulement 5% d'augmentation à 90% de la ruine). L'utilisation du rayon R dans les développements analytiques est cohérente, tout comme l'hypothèse de circularité de la section active et d'absence de décalage de la ligne neutre. Le point de décollement entre le profil et le cercle représentant la section active (fig. 2.34) correspond au point d'apparition du pli et donc à l'angle ϕ_0 .

Étude de la zone détendue

La figure 2.35 montre la répartition de la contrainte $\sigma_I H$ sur la poutre étudiée numériquement. L'échelle est volontairement limitée à 100 N/m pour mettre la zone détendue en évidence. Le pli intervient à 63% de la charge de ruine. A $F = 45\%F^{ruine}$ la zone détendue n'existe pas. Elle apparaît pour $F = F^{pli} = 0,63F^{ruine}$ et augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur maximale à la ruine. Sur la carte de la contrainte $\sigma_I H$ à $F = F^{ruine}$, la demi-longueur mesurée de la zone détendue est $\delta_m = (0,7 - 0,5)L = 0,2L$. Cette valeur est cohérente avec l'équation (2.83). On remarque par ailleurs que dans la section située en $X = 0,5L$, la contrainte $\sigma_I H$ est nulle sur la moitié de la section ce qui confirme une nouvelle fois le critère de ruine proposé.

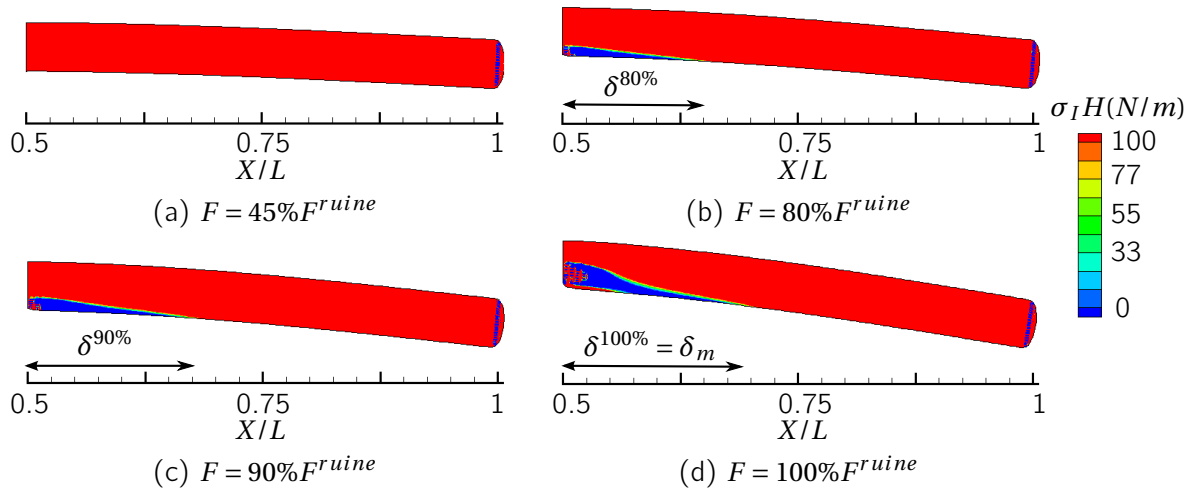


Fig. 2.35 – Évolution de la zone détendue δ sur la poutre biappuyée analysée au cours de l'étude numérique en fonction de la charge : (a) $F = 45\%F^{ruine} < F^{pli}$, (b) $F = 80\%F^{ruine}$, (c) $F = 90\%F^{ruine}$ et (d) $F = F^{ruine}$.

Étude du déplacement

La figure 2.36 présente les courbes force-déplacement tracées en $X = 3L/4$ pour chacun des maillages (cf. tab. 2.3). On choisit cette abscisse pour s'affranchir des perturbations locales dues au pli en $X = L/2$. La comparaison entre les courbes montre que le résultat sur la partie linéaire peut s'obtenir avec un nombre limité d'éléments. La partie non-linéaire nécessite des maillages plus fins pour être modélisée rigoureusement. On ajoute sur la figure la solution analytique de poutre gonflable proposée par [Ngu14] qui est valable jusqu'à l'apparition du pli. Le tracé montre une bonne corrélation entre la courbe correspondant au modèle analytique et les courbes relatives aux simulations numériques jusqu'à un point critique ($F = F^{pli}$) pour lequel les courbes se séparent. La charge de plissage est signalée sur le graphique, cette dernière est obtenue dans chaque cas par la consultation des cartes de contrainte. La charge de plissage est considérée atteinte lorsque la contrainte principale σ_I est nulle en un point. Pour ce problème, la charge de plissage est identifiée à 45 N (la valeur théorique étant de 42,9 N). Les instabilités observées sur les courbes de réponse s'expliquent par des flambement locaux sur les éléments à proximité de la section pliée. Le phénomène est atténué par

l'utilisation de maillages plus raffinés.

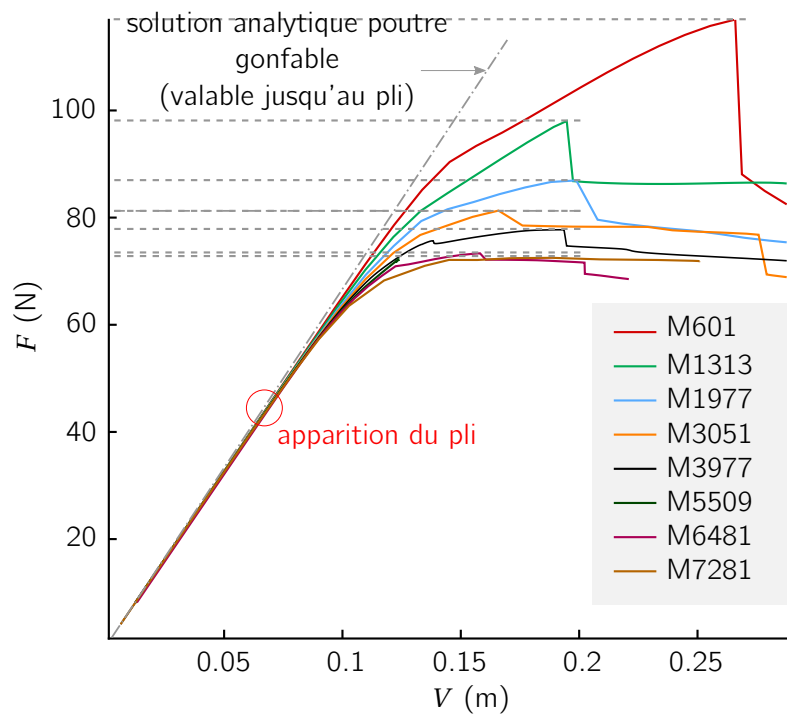


Fig. 2.36 – Courbes force-déplacement en $X = 3L/4$ pour les 8 maillages et comparaison avec la solution analytique avant l'apparition du pli.

Cette étude numérique permet la validation des hypothèses émises pour le développement du modèle analytique de prévision de la charge de ruine. L'étude conclue également sur la nécessité d'employer des maillages très fins pour modéliser la phase non-linéaire du comportement d'une poutre gonflable. On propose maintenant de comparer le déplacement obtenu par l'utilisation d'éléments finis membrane et le déplacement calculé par le modèle analytique développé.

2.5.4 Comparaison des résultats du calcul numérique 3D et du modèle analytique sur le calcul du déplacement

Tab. 2.4 – Données utilisées pour le calcul du déplacement par le modèle analytique et le calcul éléments finis en 3D.

Modèle	Configuration de référence	R(m)	L(m)	p(bar)	$E_{\ell}H$ (N/m)	$G_{\ell t}H$ (N/m)
Analytique	initiale Ω_0 (pressurisée)	0,103	4	0,25	$2,09.10^5$	$5,27.10^3$
Numérique 3D	naturelle Ω_{ϕ}	0,102 (R_{ϕ})	4 (L_{ϕ})	0,25	$2,1.10^5$ ($^{\phi}E_{\ell}H_{\phi}$)	$5,2.10^3$ ($^{\phi}G_{\ell t}H_{\phi}$)

Le tableau 2.4 précise les données utilisées par dans les deux modèles comparés. L'utilisation des équations développées permet d'exprimer analytiquement la déplacement de la poutre biappuyée considérée dans l'étude numérique précédente. Les résultats sont présentés sur la figure 2.37. Les écarts observés entre les deux modèles (analytique et numérique) sont de 2,9% à 80% de la charge de ruine et de 3,7% à 90% de la charge de ruine. Ces écarts sont à comparer aux écarts obtenus avant l'apparition du pli ($F^{pli} = 63\%F^{ruine}$) qui valent 2,9% à 65% de la charge de ruine et 0,8% à 45% de la charge de ruine. Les écarts observés sur

la partie post-plissage (i.e. $F > 65\%F^{ruine}$) demeurent très faibles dans la mesure où la solution analytique proposée, de type ingénieur, est une modélisation simple d'un problème très complexe qui présente de grands déplacements. Ces résultats sont donc satisfaisants. L'écart au delà de 90% de la charge de ruine est plus important mais n'est pas tellement significatif dans la mesure où la flèche tend vers l'infini et dans la mesure où une structure n'est jamais dimensionnée à ce niveau de chargement.

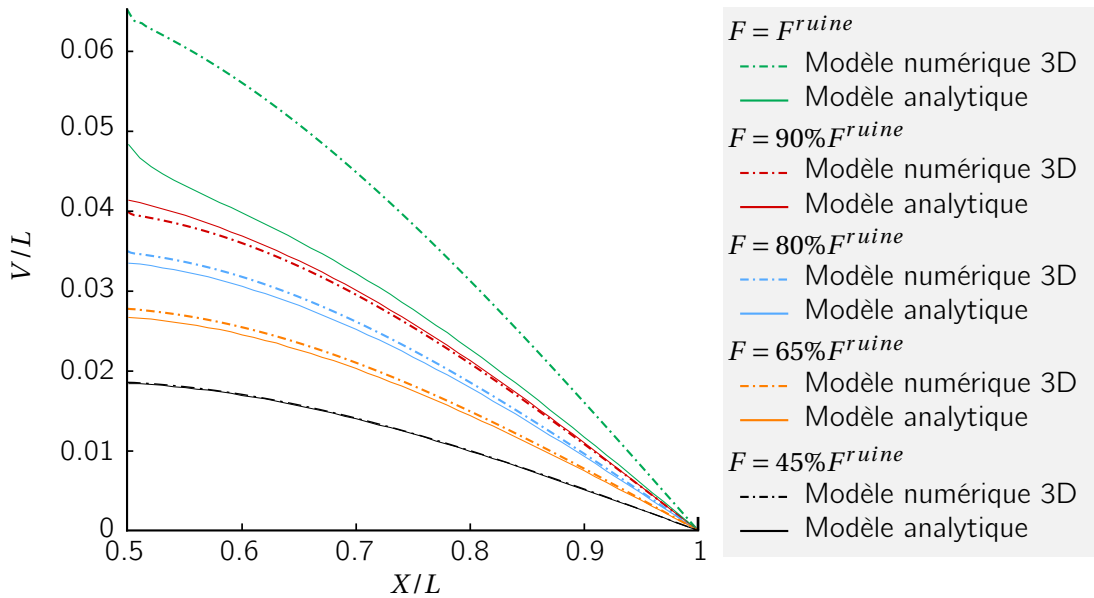


Fig. 2.37 – Comparaison des déformées obtenues par le modèle analytique et le modèle numérique 3D (M7281) à plusieurs niveaux de chargement.

2.6 Adaptation de la rigidité de l'élément fini poutre gonflable

Les résultats obtenus à l'aide du modèle analytique sont satisfaisants jusqu'à 90% de la ruine. On souhaite dans ce paragraphe développer un modèle basé sur une approche élément fini de type poutre gonflable [WT03] (cf paragraphe 2.2.5). Dans le modèle analytique, la présence d'un pli se traduit par l'utilisation d'un moment quadratique fictif $\tilde{I}$ et d'une la section fictive $\tilde{S}$ dans les équations d'équilibre en lieu et place du moment quadratique I et de la section S . Similairement à la méthode proposée par Ligarò et Barsotti [LB12], on propose d'utiliser un élément fini de type poutre gonflable en substituant $\tilde{I}$, $\tilde{S}$ et $\tilde{R}$ à I , S et R dans la matrice de rigidité.

2.6.1 Prise en compte de l'orthotropie

L'élément présenté au paragraphe 2.2.5 est écrit pour un matériau isotrope. On propose cependant de l'utiliser en considérant un modèle orthotrope pour les tissus. Pour cela, similairement à la démarche suivie pour le calcul analytique du déplacement, il suffit d'adapter les propriétés matérielles et les données géométriques en choisissant la configuration initiale comme référence. Ainsi, les modules de Young et de cisaillement à utiliser sont calculés avec l'équation (2.6) et les données géométriques sont obtenues en utilisant le système (2.4). La matrice de rigidité élémentaire $[K]^e$ est construite de manière identique à la

méthode proposée au paragraphe 2.2.5. On trouve :

$$[K]^e = \frac{(E_\ell + \frac{P}{S})I}{L_0^3(1 + \phi_p)} \begin{bmatrix} 12 & 6L_0 & -12 & 6L_0 \\ 6L_0 & L_0^2(4 + \phi_p) & -6L_0 & L_0^2(2 - \phi_p) \\ -12 & -6L_0 & 12 & -6L_0 \\ 6L_0 & L_0^2(2 - \phi_p) & -6L_0 & L_0^2(4 + \phi_p) \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

avec,

$$\phi_p = \frac{12(E_\ell + \frac{P}{S})I}{L_0^2(P + kG_{\ell t}S)} \quad (2.161)$$

Par ailleurs on utilise cet élément en trois dimensions (donc 6 degrés de liberté par nœud). La rigidité est la même dans les deux directions de flexion. La traction-compression est ajoutée en considérant un élément de poutre classique. En posant

$$B = \frac{(E_\ell + \frac{\tilde{P}}{S})\tilde{I}}{L_0^3(1 + \tilde{\phi}_p)} \quad (2.162)$$

où

$$\tilde{\phi}_p = \frac{12(E_\ell + \frac{\tilde{P}}{S})\tilde{I}}{L_0^2(\tilde{P} + kG_{\ell t}\tilde{S})} \quad (2.163)$$

la matrice de rigidité élémentaire devient

$$[K]^e = \begin{bmatrix} E_\ell S/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_\ell S/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12B & 0 & 0 & 0 & 6L_0 B & 0 & -12B & 0 & 0 & 0 & 6L_0 B \\ 0 & 0 & 12B & 0 & -6L_0 B & 0 & -12B & 0 & 0 & 0 & -6L_0 B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{\ell t}I/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2G_{\ell t}I/L_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6L_0 B & 0 & L_0^2(4 + \tilde{\phi}_p)B & 0 & 0 & 0 & 6L_0 B & 0 & L_0^2(2 - \tilde{\phi}_p)B & 0 \\ 0 & 6L_0 B & 0 & 0 & 0 & L_0^2(4 + \tilde{\phi}_p)B & 0 & -6L_0 B & 0 & 0 & 0 & L_0^2(2 - \tilde{\phi}_p)B \\ -E_\ell S/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_\ell S/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12B & 0 & 0 & 0 & -6L_0 B & 0 & 12B & 0 & 0 & 0 & -6L_0 B \\ 0 & 0 & -12B & 0 & 0 & 0 & 6L_0 B & 0 & 12B & 0 & 6L_0 B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2G_{\ell t}I/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{\ell t}I/L_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6L_0 B & 0 & L_0^2(2 - \tilde{\phi}_p)B & 0 & 0 & 0 & 6L_0 B & 0 & L_0^2(4 + \tilde{\phi}_p)B & 0 \\ 0 & 6L_0 B & 0 & 0 & 0 & L_0^2(2 - \tilde{\phi}_p)B & 0 & -6L_0 B & 0 & 0 & 0 & L_0^2(4 + \tilde{\phi}_p)B \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

2.6.2 Algorithme

La longueur de la zone détendue tout comme l'amplitude du pli dépendent uniquement de la valeur du moment de flexion dans la section par l'intermédiaire de l'angle ϕ_0 . La méthode utilisée repose sur un double calcul :

- calcul sur la géométrie initiale pour identifier la distribution du moment de flexion ;
- mise à jour des moments quadratiques et des sections actives : nouveau calcul

Le calcul du moment de flexion se fait à partir des fonctions d'interpolations et de la relation suivante :

$$M = E_\ell I \frac{d\theta}{dX} \quad (2.165)$$

On déduit avec l'équation (2.30) que :

$$\frac{d\theta}{dX} = \frac{d^2 V}{dX^2} + \frac{L_0^2 \phi_p}{12} \frac{d^3 V}{dX^3} \quad (2.166)$$

or, en utilisant l'équation (2.37) :

$$\frac{d^2 V}{dX^2} = \frac{d^2}{dX^2} \langle \mathcal{N} \rangle [A] \{U\}^e \text{ et } \frac{d^3 V}{dX^3} = \frac{d^3}{dX^3} \langle \mathcal{N} \rangle [A] \{U\}^e \quad (2.167)$$

où le résultat du produit $\langle \mathcal{N} \rangle [A]$ est défini dans l'équation (2.38) en utilisant les fonctions de formes N_{V_1} , N_{θ_1} , N_{V_2} et N_{θ_2} de l'élément :

$$\langle \mathcal{N} \rangle [A] = \langle N_{V_1} N_{\theta_1} N_{V_2} N_{\theta_2} \rangle \quad (2.168)$$

La dérivée du produit $\langle \mathcal{N} \rangle [A]$ est alors :

$$\frac{d}{dX} (\langle \mathcal{N} \rangle [A]) = \langle \frac{d}{dX} N_{V_1} \frac{d}{dX} N_{\theta_1} \frac{d}{dX} N_{V_2} \frac{d}{dX} N_{\theta_2} \rangle \quad (2.169)$$

La dérivée seconde est :

$$\frac{d^2}{dX^2} (\langle \mathcal{N} \rangle [A]) = \langle \frac{d^2}{dX^2} N_{V_1} \frac{d^2}{dX^2} N_{\theta_1} \frac{d^2}{dX^2} N_{V_2} \frac{d^2}{dX^2} N_{\theta_2} \rangle \quad (2.170)$$

et la dérivée troisième s'écrit :

$$\frac{d^3}{dX^3} (\langle \mathcal{N} \rangle [A]) = \langle \frac{d^3}{dX^3} N_{V_1} \frac{d^3}{dX^3} N_{\theta_1} \frac{d^3}{dX^3} N_{V_2} \frac{d^3}{dX^3} N_{\theta_2} \rangle \quad (2.171)$$

Or, en dérivant trois fois les expressions des fonctions de forme à partir de l'équation (2.38), on remarque que :

$$\begin{cases} \frac{d^3}{dX^3} N_{V_1}(X) = 0 \\ \frac{d^3}{dX^3} N_{\theta_1}(X) = 0 \\ \frac{d^3}{dX^3} N_{V_2}(X) = 0 \\ \frac{d^3}{dX^3} N_{\theta_2}(X) = 0 \end{cases} \quad (2.172)$$

ainsi,

$$\frac{d^3}{dX^3} \langle \mathcal{N} \rangle [A] \{U\}^e = 0 \quad (2.173)$$

l'équation (2.166) devient alors :

$$\frac{d\theta}{dX} = \frac{d^2}{dX^2} \langle \mathcal{N} \rangle [A] \{U\}^e \quad (2.174)$$

et donc,

$$M(X) = E_\ell I \frac{d\theta}{dX} = EI \frac{d^2}{dX^2} \langle \mathcal{N} \rangle [A] \{U\}^e \quad (2.175)$$

ainsi, en remplaçant les fonctions de forme par les expressions données dans l'équation (2.38) dans l'équation (2.170) :

$$M(X) = E_\ell I \left\langle \frac{12X - 6L_0}{L_0^3(1 + \phi_p)} \quad \frac{1}{2} \frac{12X - 2\phi_p L_0 - 8L_0}{L_0^2(1 + \phi_p)} \quad - \frac{12X - 6L_0}{L_0^3(1 + \phi_p)} \quad \frac{1}{2} \frac{12X + 2\phi_p L_0 - 4L_0}{L_0^2(1 + \phi_p)} \right\rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2.176)$$

Cet élément fini est utilisé en 3D et en considérant 6 degrés de liberté à chaque nœud. Le comportement en traction compression et en torsion est celui d'une poutre classique. On insistera sur la prise en compte de l'orthotropie dans l'utilisation de cet élément fini. Les modules appliqués prennent en compte les variations géométriques et matérielles dues au gonflage (cf. éq (2.4) et (2.6)).

2.6.3 Comparaison des résultats avec le calcul numérique 3D et le modèle analytique

Le tableau 2.5 précise les données d'entrée des trois modèles comparés. La figure 2.39 présente les résultats obtenus pour le déplacement en utilisant l'élément fini poutre gonflable adapté et propose une comparaison avec les déplacements analytiques obtenus à partir du modèle développé et les déplacements

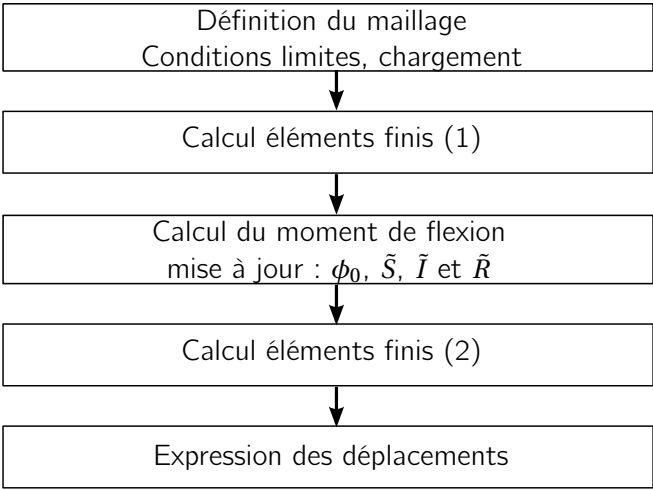


Fig. 2.38 – Principe du calcul par éléments-finis avec présence du pli.

Tab. 2.5 – Données utilisées pour le calcul du déplacement par le modèle analytique et le calcul éléments finis en 3D et l’élément fini poutre gonflable.

Modèle	Configuration de référence	R(m)	L(m)	p(bar)	$E_{\ell}H(\text{N/m})$	$G_{\ell t}H(\text{N/m})$
Analytique	initiale Ω_0 (pressurisée)	0,103	4	0,25	$2,09.10^5$	$5,27.10^3$
Numérique 3D	naturelle Ω_{ϕ}	0,102 (R_{ϕ})	4 (L_{ϕ})	0,25	$2,1.10^5$ (${}^{\phi}E_{\ell}H_{\phi}$)	$5,2.10^3$ (${}^{\phi}G_{\ell t}H_{\phi}$)
Éléments finis poutre	initiale Ω_0 (pressurisée)	0,103	4	0,25	$2,09.10^5$	$5,27.10^3$

issus du calcul élément fini 3D basé sur des éléments membrane. Les résultats de l’élément fini poutre gonflable sont plus éloignés du calcul en 3D par rapport au modèle analytique. La non-linéarité de la courbe force-déplacement correspondant à l’élément fini de poutre gonflable est plus forte en comparaison avec les deux autres modèles. Le résultat est néanmoins cohérent puisque cette courbe force-déplacement a une allure similaire aux deux autres. On notera la grande proximité entre les trois modèles jusqu’à 80% de la charge de ruine, ce qui est un résultat satisfaisant au regard de la complexité du problème mécanique.

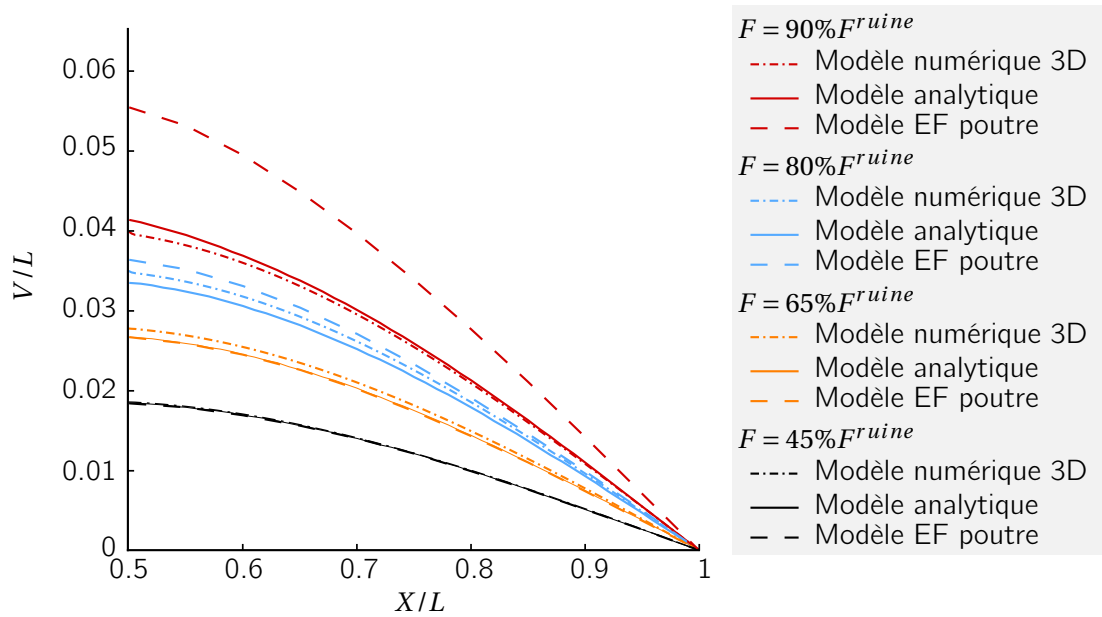


Fig. 2.39 – Comparaison des flèches calculées par le modèle analytique, l'élément fini poutre gonflable et le code numérique 3D (M7281) à plusieurs niveaux de chargement.

2.7 Étude expérimentale d'une poutre gonflable en flexion 3 points

2.7.1 Présentation et objectifs de l'essai

On propose de réaliser un essai dont l'objectif est multiple :

- Valider la charge de ruine proposée analytiquement.
- Vérifier que cette charge ne dépend que de la géométrie de la poutre en configuration initiale.
- Vérifier que le pli n'affecte que la moitié de la section lorsque la charge de ruine est atteinte.
- Comparer les déplacements calculés avec les trois modèles (analytique, élément-fini de poutre gonflable et élément fini membrane) au déplacement expérimental.

L'essai est réalisé sur une poutre biappuyée soumise à un chargement ponctuel au milieu.

2.7.2 Fabrication des poutres

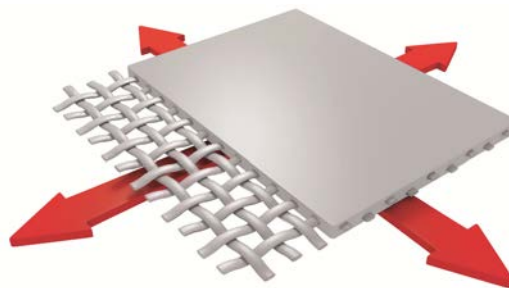


Fig. 2.40 – Technologie *précontraint*[®] (source Ferrari).

Trois poutres de même dimension ont été fabriquées par nos soins. Elles sont constituées de 3 matériaux différents. Les textiles utilisés sont les F302, F702 et F1202 de la gamme *précontraint*[®] Serge Ferrari. La spécificité de cette gamme est que le textile est soumis à une contrainte biaxiale selon la trame et la chaîne

lors du tissage. Le tissage classique ne s'effectue qu'avec une seule précontrainte dans le sens de la chaîne. La fabrication se décompose en trois étapes :

- Dessin du patron (fig. 2.41(a)).
- Découpe du patron (fig. 2.41(b)).
- Fermeture par soudure haute-fréquence (fig. 2.41(c)).

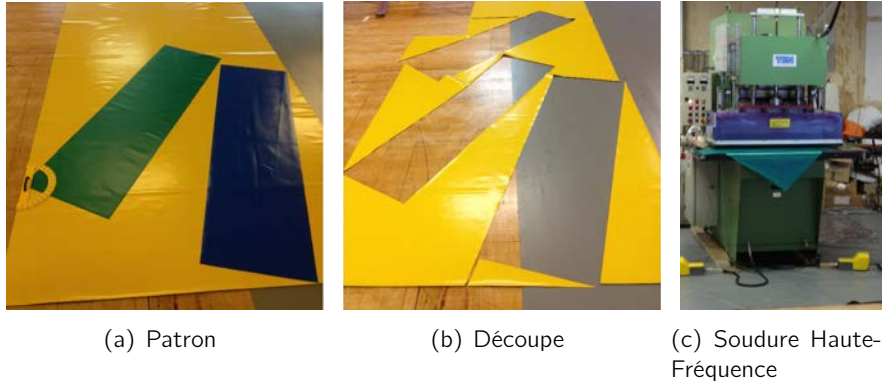


Fig. 2.41 – Différentes étapes de la fabrication d'une poutre gonflable.

Le dessin du patron se fait directement sur le rouleau de tissu en s'assurant que l'orientation des fibres de chaîne coïncide avec l'axe de la poutre. Une bande de 2 cm supplémentaire, qui correspond à la largeur du fer de la soudeuse, est ajoutée aux dimensions voulues. Une fois tracé, le patron est découpé puis la poutre est soudée le long de son axe. On remarque que les patrons dessinés sur la figure 2.41 ne sont pas orientés selon les directions de la chaîne et de la trame. Les patrons visibles correspondent à des orientations de 15°, 30° et 45° du tissu par rapport à l'axe de la poutre. Dans le cadre de ce travail, on se limitera à l'étude de poutres orientées selon la direction de la chaîne.

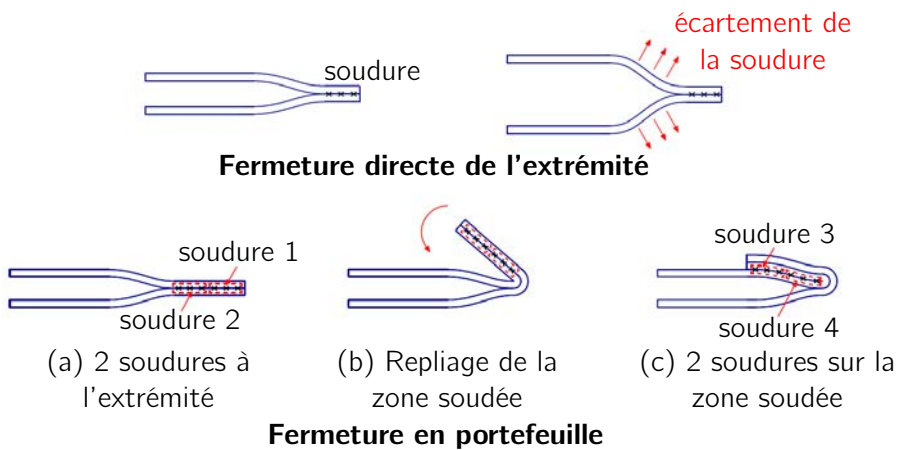


Fig. 2.42 – Fermeture en portefeuille de l'extrémité d'une poutre gonflable [Ngu14].

La fermeture des extrémités, sur la figure 2.42, s'effectue en deux temps : Afin d'assurer l'étanchéité, deux soudures sont réalisées sur l'extrémité de la poutre. Cette fermeture seule n'est pas suffisante puisque la soudure est sollicitée en arrachement ce qui présente un risque de rupture important. Pour limiter la contrainte au niveau de la soudure, une deuxième opération est réalisée : l'extrémité soudée est repliée sur la poutre puis à nouveau soudée sur la paroi du tube. Une feuille de papier Kraft est insérée entre les deux parois du tube pour qu'elles ne se soudent au cours de l'opération. A la fin du processus de fermeture, la soudure est sollicitée en cisaillement, ce qui limite le risque de réouverture de l'extrémité. La fermeture réa-

lisée provoque un changement de géométrie de la poutre dont la section n'est plus circulaire à proximité de la fermeture. On choisit donc de travailler sur une portion de la poutre pour laquelle la section reste circulaire.

2.7.3 Montage et appareillage

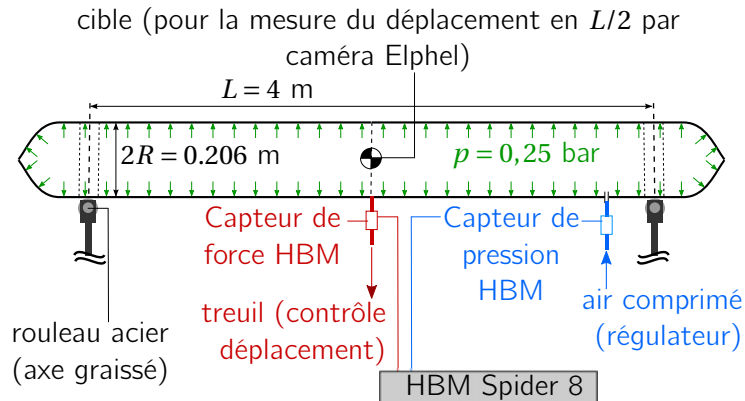


Fig. 2.43 – Vue générale du montage pour la mesure de la force de ruine.

Les poutres testées présentent les caractéristiques géométriques suivantes en configuration initiale (*i.e.* pressurisée) : la longueur est de 4,5 m ($L = 4\text{ m}$ entre les appuis pour s'assurer que la section soit circulaire), le rayon R est de 0,103 m. Les mesures de longueur et de rayon sont effectuées après la mise sous pression de la poutre, les valeurs correspondent alors à la configuration initiale. La poutre est pressurisée à $p = 0,25\text{ bar}$. D'après la formule analytique développée précédemment (éq. 2.51),

$$M^{ruine} = 67,4\text{ N.m} \quad (2.177)$$

avec l'expression du moment de flexion pour une poutre biappuyée,

$$\begin{cases} M = F \frac{X}{2} & \text{si } X \in [0, L/2] \\ M = F \frac{L - X}{2} & \text{si } X \in [L/2, L] \end{cases} \quad (2.178)$$

et sachant que le pli apparaît en $X = L/2$, on obtient la charge de ruine :

$$F^{ruine} = 67,4\text{ N} \quad (2.179)$$

Réalisation des appuis



Fig. 2.44 – Réalisation des appuis à l'aide d'un rouleau en acier poli et dont l'axe est graissé.

La mise en œuvre des conditions limites n'est pas simple puisqu'il faut réaliser des appuis glissants sans frottement. La solution proposée consiste à utiliser des rouleaux en acier. L'axe est poli afin d'éliminer au maximum les irrégularités et rendre la surface lisse. Les axes sont ensuite graissés pour diminuer du mieux possible le frottement. Les deux appuis sont espacés de 4 m de manière à se placer suffisamment loin des extrémités et s'affranchir des effets de bord. Le positionnement de la poutre sur les appuis n'est pas anodin : il faut la placer de manière à ce qu'aucune rotation autour de l'axe de la poutre n'apparaisse au début du chargement. L'appui est présenté sur la figure 2.44.

Application de la force

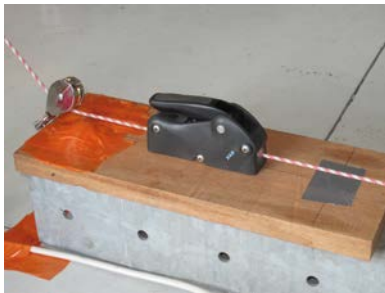


Fig. 2.45 – Dispositif anti-retour.



Fig. 2.46 – Patch de fixation pour la poutre.

L'application du chargement se fait par l'intermédiaire d'une corde. La problématique de la liaison entre la poutre et la corde est importante. Le pli apparaissant au point d'application de la force pour cette configuration, nous avons choisi d'appliquer la force sur la moitié de la poutre qui travaille en traction (*i.e.* en haut si le déplacement s'effectue par le haut et en bas si le déplacement s'effectue vers le bas). Si cette condition n'est pas respectée, la corde s'applique directement sur le pli et influence le résultat. Pour lier la corde à la poutre, un patch a été fabriqué et collé sur la partie inférieure de la poutre avec une colle spéciale PVC, ce patch est visible sur la figure 2.46. L'utilisation de deux poulies permet de placer le capteur de force à l'horizontale afin que son poids propre n'influence pas le chargement. Un dispositif anti-retour (fig. 2.45) est installé afin de maintenir le déplacement imposé constant tout au long de l'incrément. Le dispositif utilisé permet de maintenir le déplacement imposé constant.

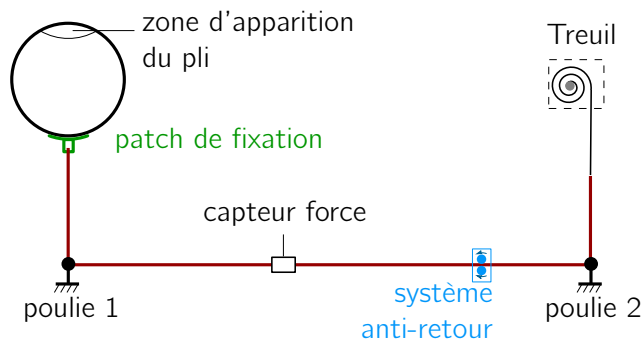


Fig. 2.47 – Vue schématique de l'application et de mesure de la force.

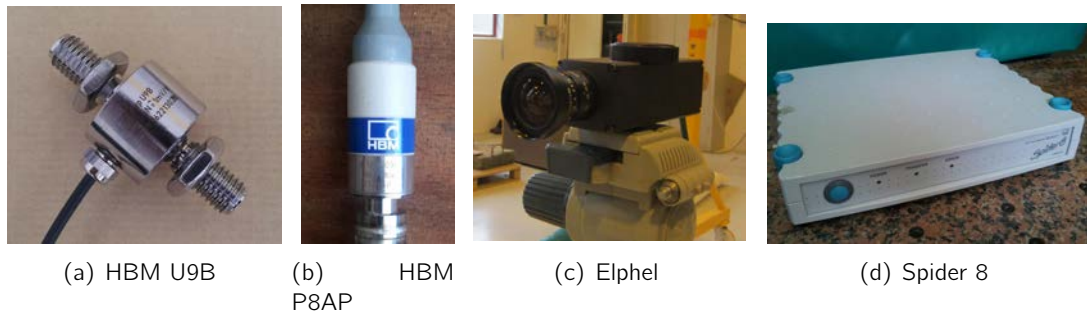


Fig. 2.48 – Appareillage pour les mesures.

Mesures et protocole

Trois mesures sont nécessaires à chaque pas de chargement :

- **mesure de la pression** pour s'assurer que cette dernière reste stable à une valeur choisie, ici 25 kPa : la mesure est réalisée à l'aide d'un capteur HBM P8AP (fig. 2.48(b)) dont la gamme de mesure s'étend de 0 à 1 MPa (classe de précision 0,3) avec une température de service variant de -40°C à 70°C .
- **mesure de la force** pour tracer la courbe force-déplacement : la mesure s'effectue avec un capteur de type HBM U9B (fig. 2.48(a)) dont la gamme de mesure s'étend de -5 à $+5$ kN (classe de précision 0,2) dont la température de service varie de -10°C à 70°C .
- **mesure du déplacement** pour tracer la courbe force-déplacement : une cible est placée sur la ligne neutre au milieu de la poutre, une caméra de type Elphel (fig. 2.48(c)) de résolution 2592×1936 pixels et équipée d'une optique Edmund 68-670 (fig. 2.48(c)) de focale 5 mm avec un champ de vision de $65,2^{\circ}$ de résolution 120 lp/mm à faible distorsion ($< 0,5$) est installée à environ 3 m de la poutre pour réaliser une mesure sans contact. La distance de travail minimale de l'objectif est de 1,5 m.

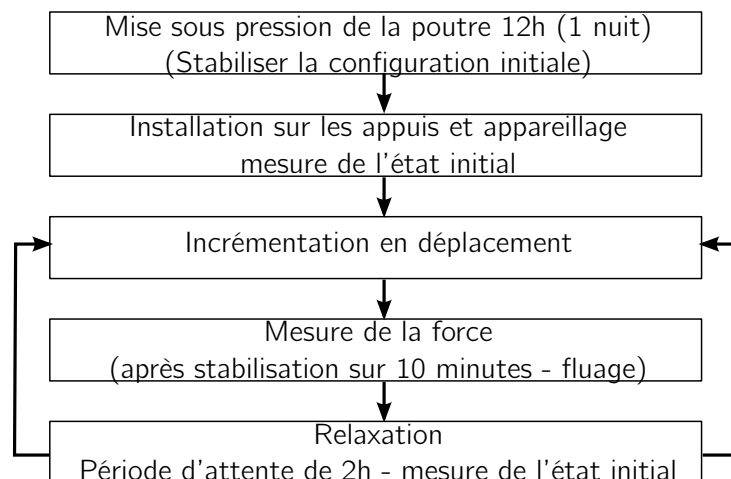


Fig. 2.49 – Protocole expérimental suivi pour la mesure de la force de ruine.

Les capteurs sont reliés à une centrale d'acquisition HBM spider 8 (fig. 2.48(d)), ce qui permet la mesure de la force et de la pression interne dans ce montage. La centrale d'acquisition assure la conversion en N ou en Pa des signaux électriques renvoyés par les capteurs. L'interface s'effectue par le logiciel Catman qui offre la possibilité de visualiser les courbes de force et de pression en simultané et en temps réel. Des valeurs moyennes peuvent également être affichées. La valeur moyenne permet de réaliser les mesures de force en tenant compte du phénomène de fluage : la mesure n'est réalisée qu'après vérification de la stabilité de la

force moyenne sur un intervalle de 10 minutes.

Le même protocole expérimental (fig. 2.49) est suivi pour les trois poutres. Les poutres étant stockées pliées, il est important de mettre la poutre sous pression au préalable pour effacer les marques de stockage et permettre aux fibres du tissu de se remettre en place. Cette opération s'effectue de nuit à moyenne pression (environ 0,1 bar). La poutre est ensuite installée sur les supports en s'assurant de l'absence de rotation initiale. La cible est photographiée dans sa position initiale. Le pilotage s'effectue en déplacement. L'incrément du déplacement est réalisée à l'aide d'un treuil par une impulsion sur le mécanisme de levage. La cible est photographiée à chaque incrément et la force est mesurée une fois la structure stabilisée. La répétabilité des mesures est vérifiée en répétant l'opération après le retour de la poutre à la configuration initiale du problème. Pour cela, un temps d'attente de 2h minimum a été respecté du fait du fluage. Une fois ce délai écoulé, l'état initial est à nouveau identifié. Ce protocole a été respecté pour chacune des poutres.

2.7.4 Résultats

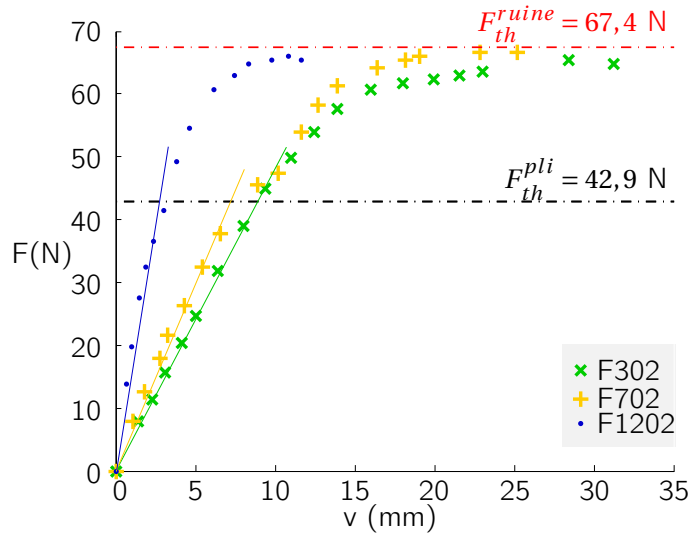


Fig. 2.50 – Courbes expérimentales force-déplacement pour les 3 poutres testées.

Les résultats sont présentés sur la figure 2.50. On constate sur les courbes que la charge de ruine est indépendante de la poutre choisie. La charge de ruine dépend donc de la géométrie et est indépendante du matériau constitutif, ce qui confirme les résultats théoriques et numériques des parties précédentes. La charge de ruine mesurée est proche de la valeur théorique de 67,4 N. Les écarts relatifs sont de 3% ($F_{exp}^{ruine} = 65,4$ N) pour le F302, de 1,2% ($F_{exp}^{ruine} = 66,6$ N) pour le F702 et de 3% ($F_{exp}^{ruine} = 65,4$ N) pour le F1202, cet écart est dans la marge d'erreur des appareils de mesure. Par ailleurs, il est important de souligner l'importance du rayon dans l'expression du moment de la ruine où ce dernier intervient de façon cubique. En notant δR une variation de rayon et δF une variation de force, on a :

$$\frac{\delta F}{F} = 3 \frac{\delta R}{R} \quad (2.180)$$

Ainsi une imperfection géométrique sur le rayon se répercute sur la ruine observée. Notons finalement que ce sont des résultats tout à fait satisfaisants dans le sens où la structure est particulièrement déformée lorsque la ruine est atteinte, comme le montre la figure 2.51 alors que le calcul analytique de la charge de ruine est fait à partir d'un modèle très simplifié sur la configuration initiale. La figure 2.51 montre également la position du pli à proximité de la ruine et montre que celui-ci impacte la moitié de la section.

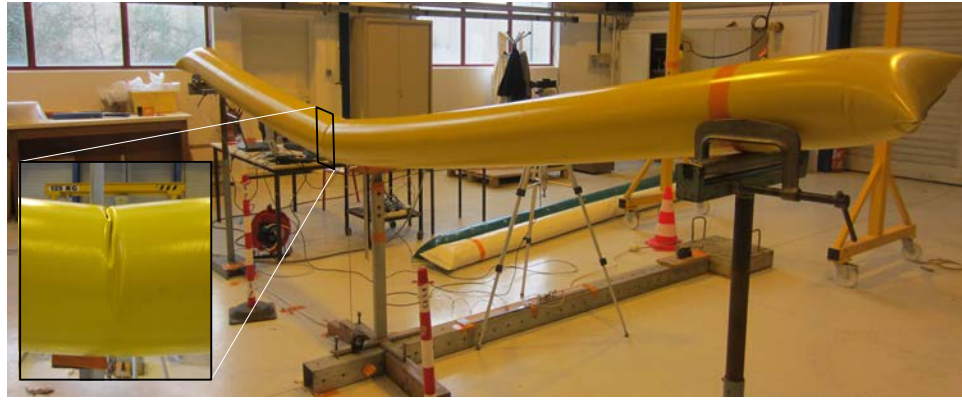


Fig. 2.51 – Déformée de la poutre et visualisation du pli à la ruine.

La figure 2.52 permet de comparer les résultats des trois modèles développés aux données expérimentales. La flèche au milieu de la poutre ($X = L/2$) est tracée pour chacun des modèles : en rouge pour le calcul en 3D avec des éléments membrane, en bleu pour le calcul analytique et en vert pour l'élément fini poutre gonflable. Les points expérimentaux apparaissent en noir. On peut conclure au regard de ces résultats que l'élément fini de poutre gonflable adapté fournit la courbe force-déplacement la plus proche des points expérimentaux pour ce cas particulier. Il faut cependant souligner que le calcul en 3D présente une allure cohérente mais surestime la charge de ruine, cette surestimation diminue en affinant le maillage, au prix d'un temps de calcul très important. Le modèle analytique donne des résultats très satisfaisant jusqu'à environ 80% de la charge de ruine, notons cependant que la charge de ruine mesurée expérimentalement est plus faible que la charge de ruine anticipée par le modèle analytique, l'écart avec le modèle est alors amplifié.

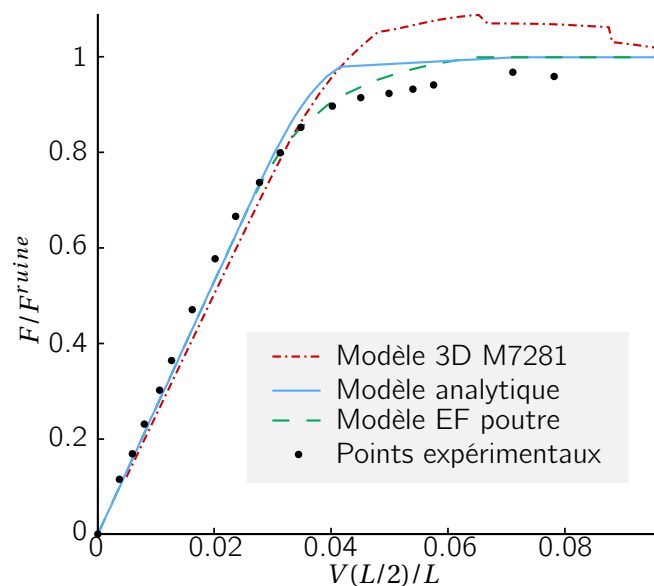


Fig. 2.52 – Comparaison des déformées calculées par le modèle analytique, l'élément fini poutre gonflable et le code numérique 3D (M7281) en $X = L/2$.

2.7.5 Conclusion

Cet essai permet de valider les trois points proposés en objectif : la charge de ruine est indépendante du matériau et est uniquement régie par la géométrie de la poutre en configuration initiale et la pression de gonflage, la valeur de la charge de ruine peut être prévue (pour une poutre biappuyée) par l'expression (2.179). Pour ce niveau de chargement, le pli se propage à la moitié de la section.

2.8 Utilisation de l'élément fini sur un problème plus complexe

2.8.1 Présentation du cas-test

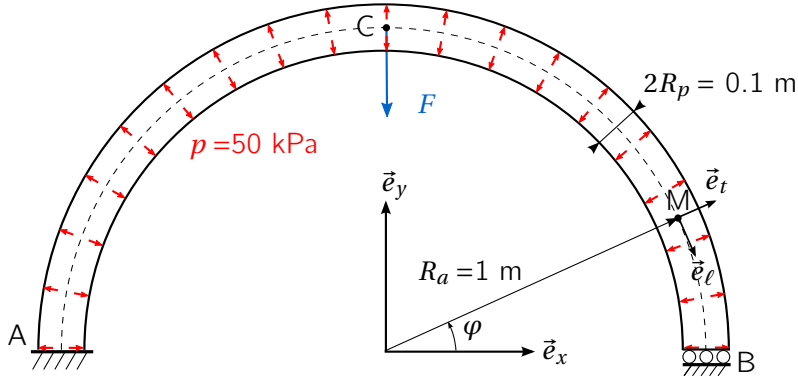


Fig. 2.53 – Étude d'une arche encastrée soumise à une charge latérale uniforme.

On propose de conclure ce chapitre sur un exemple d'utilisation de l'élément fini sur une géométrie plus complexe. On considère une arche gonflable de rayon $R_a = 1$ m constituée d'une poutre gonflable de rayon $R_p = 0,05$ m. Le tissu d'épaisseur H est supposé orthotrope avec un même module de Young dans les deux directions d'orthotropie ${}^\phi E_\ell H = {}^\phi E_t H = 2,1 \cdot 10^5$ N/m et un module de cisaillement ${}^\phi G_{\ell t} H = 5,2 \cdot 10^3$ N/m dans la configuration naturelle. Les directions d'orthotropie sont définies en un point M par les vecteurs $\vec{e}_\ell$ et $\vec{e}_t$. L'arche est pressurisée à une pression $p = 50$ kPa et est soumise à une charge ponctuelle $\vec{F} = -F\vec{e}_y$ en son sommet. Les conditions aux limites considérées sont un encastrement à une extrémité et un encastrement glissant à l'autre extrémité. Le problème est synthétisé sur la figure 2.53.

2.8.2 Construction des modèles

On choisit de modéliser l'arche de deux façons : en 3D avec les éléments membrane et en 2D avec l'élément fini présenté dans le paragraphe précédent. Le modèle construit avec l'élément-fini de poutre gonflable est présenté sur la figure 2.54. Le maillage est constitué de 39 éléments à deux noeuds (soit 40 noeuds) à 6 degrés de liberté. Ce raffinement est suffisant pour la convergence de la solution. Dans la base de référence $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les degrés de liberté sont notés U, V et W pour les déplacements et θ_X, θ_Y et θ_Z pour les rotations. Un encastrement glissant est réalisé au point A, ainsi la translation est nulle selon les directions $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ ($V(A) = W(A) = 0$) de même que les rotations de corps rigide ($\theta_X(A) = \theta_Y(A) = \theta_Z(A) = 0$), et au point B, ainsi, $U(C) = V(C) = 0$ et $\theta_X(C) = \theta_Y(C) = \theta_Z(C) = 0$. La charge est appliquée au point C.

De la même façon, le modèle en 3D constitué d'éléments membrane est présenté sur la figure 2.55. Un plan de symétrie est défini par l'équation $Y = 0$, son existence permet de ne représenter que la moitié de l'arche. Soit $M(X, Y, Z)$ un point quelconque dont le déplacement est noté $\mathbf{U} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_y + W\vec{e}_z$, les conditions aux limites sont alors :

$$\begin{aligned} V(X, 0, Z) &= 0 \\ W(X, Y, 0) &= 0 \\ U(0, Y, Z) &= 0 \end{aligned} \tag{2.181}$$

Le chargement (dont la résultante vaut F) est réparti sur le contour $\partial\Omega$ de la section droite contenant le point C pour optimiser le calcul et ne pas créer de concentration de contrainte au point C.

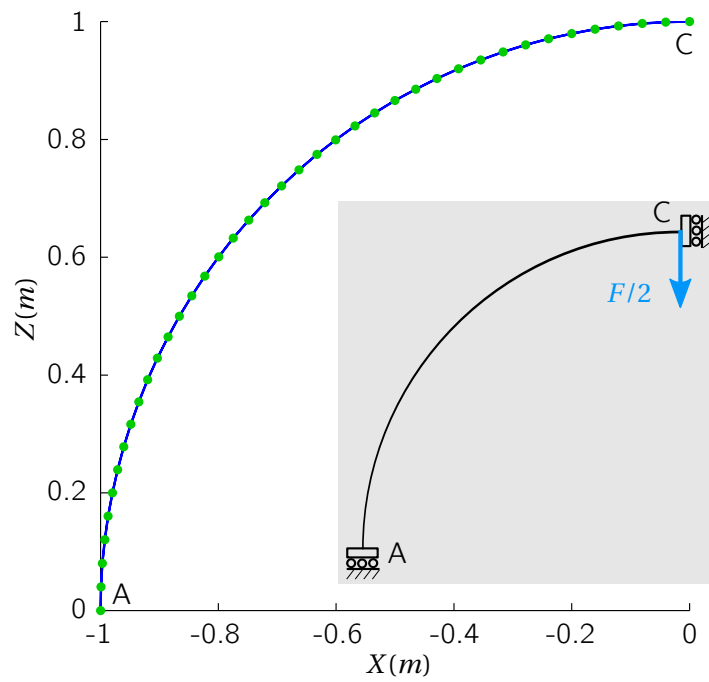


Fig. 2.54 – Modèle construit à partir de l'élément-fini poutre gonflable.

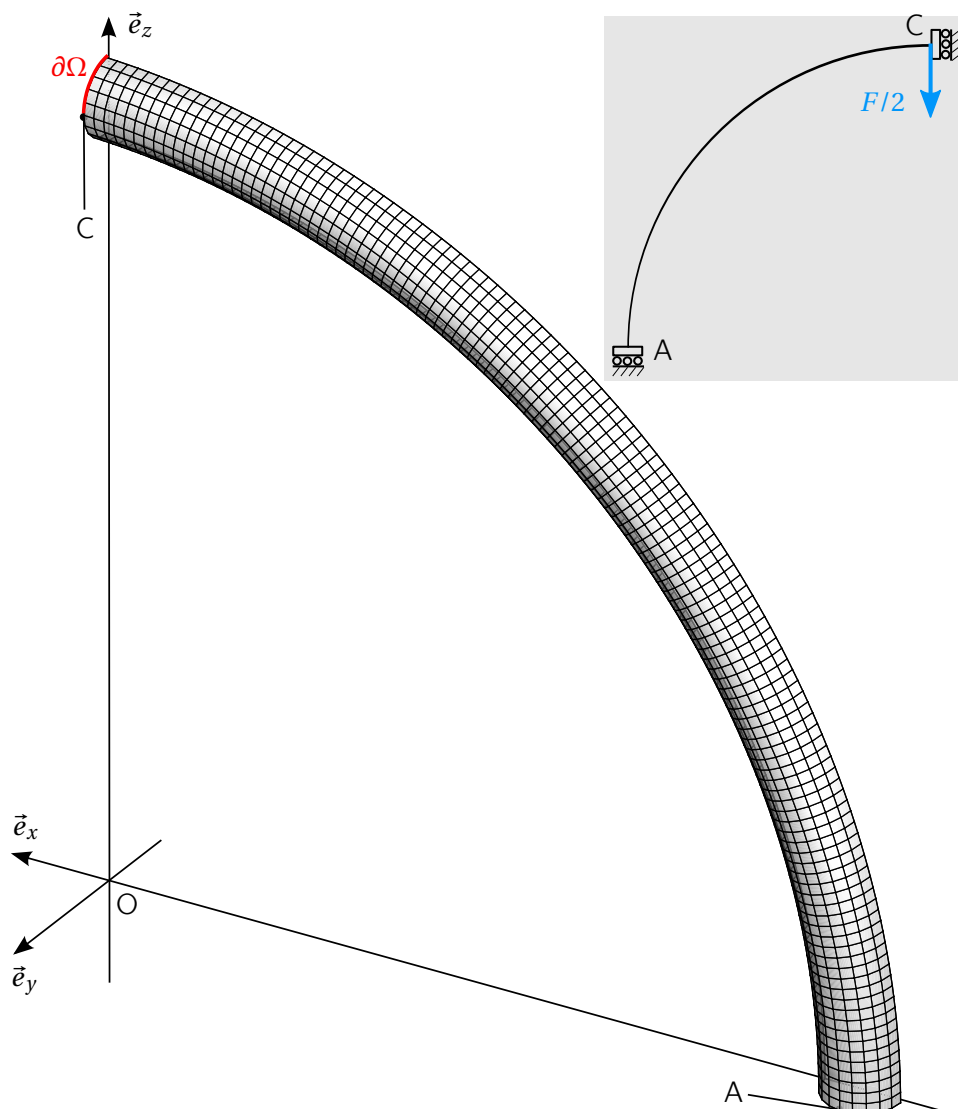


Fig. 2.55 – Modèle construit en 3D à partir d'éléments membrane.

2.8.3 Résultats

Étude de la pré-contrainte due à la mise sous pression avec le modèle 3D

Le travail analytique mené est basé sur l'hypothèse de l'uniformité de la pré-contrainte de gonflage le long de la poutre. La pré-contrainte conditionne l'apparition du pli lors de l'étude d'une poutre droite, et est égale à

$$\Sigma_I^0 = \Sigma_{xx}^0 = \frac{pR_p}{2H} \quad (2.182)$$

dans la direction axiale d'orthotropie. On s'intéresse à cette même pré-contrainte sur une arche afin de connaître sa répartition. Dans ce cas, cette contrainte n'est plus orientée selon $\vec{e}_x$ en tout point (fig. 2.53), mais sa résultante est :

$$\int_S \Sigma_I^0 dS = p\pi R_p^2 \quad (2.183)$$

Les résultats issus de l'utilisation du code en 3 dimensions sont présentés sur la figure 2.56. Ils montrent que la pré-contrainte n'est pas homogène. Son profil est tracé sur la figure 2.57. On observe cependant que la valeur moyenne de Σ_I^0 est égale à $pR_p/(2H)$. Ainsi, en considérant le critère de pli

$$M^{pli} = \frac{p_p i R_p^3}{2} \quad (2.184)$$

la charge de pli et la charge de ruine seront surestimées ou sous-estimées selon la direction de la charge appliquée.

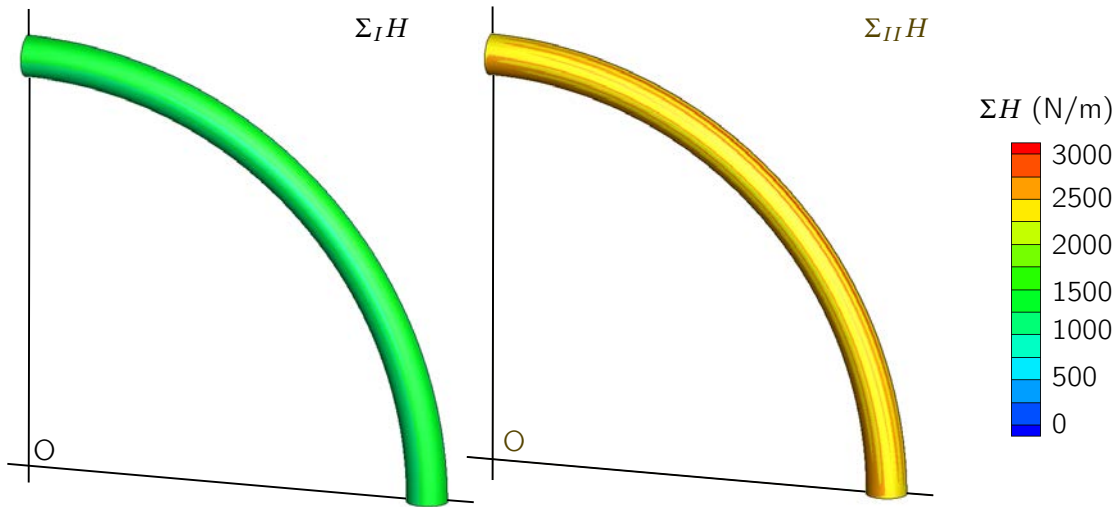


Fig. 2.56 – Contraintes principales normale Σ_I^0 et tangentielle Σ_{II}^0 dans l'arche à la fin du gonflage.

Comparaison des modèles

On s'intéresse dans un premier temps à la courbe force (F) - déplacement vertical (W) tracée au point C. Plusieurs maillages, listés dans le tableau 2.6 sont utilisés, les données du calcul sont précisées dans le tableau 2.7.

La figure 2.58 montre que les résultats obtenus pour les deux maillages les plus fins (*i.e* M5307 et M7025) sont très proches. On considère que la solution a convergé. La force de ruine est obtenue par lecture graphique sur la figure 2.58. L'étude des cartes de la contrainte $\Sigma_I H$ sur la figure 2.59 permet de préciser cette valeur et d'obtenir la charge de pli.

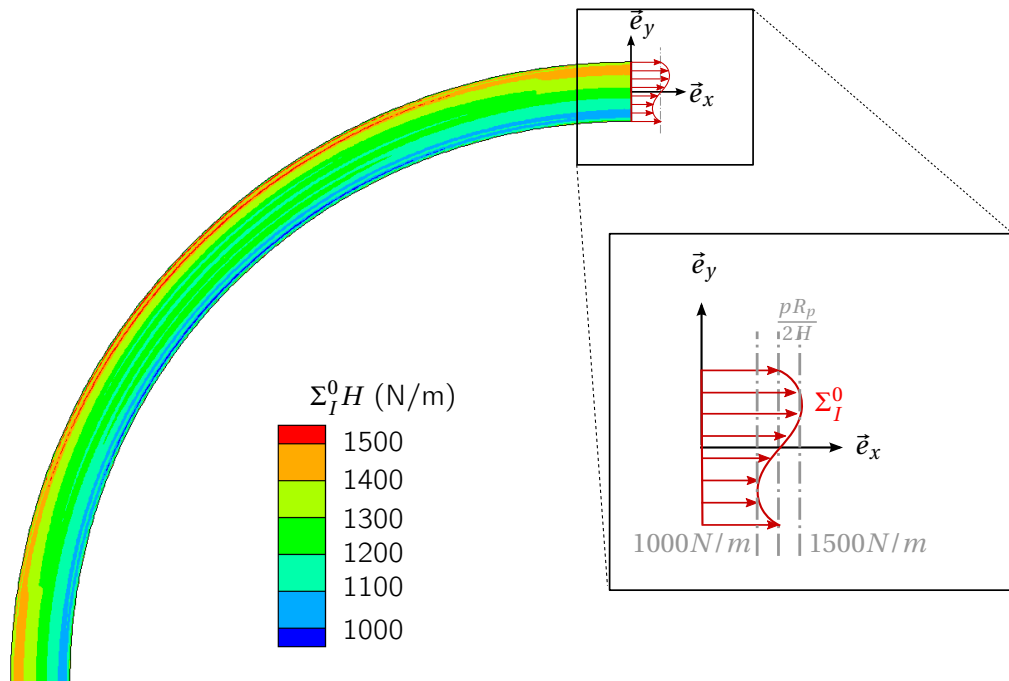


Fig. 2.57 – Profil de la contrainte principale axiale Σ_I^0 dans l'arche à la fin du gonflage (à échelle plus détaillée).

Tab. 2.6 – Nombre d'éléments des maillages utilisés pour le calcul de l'arche gonflable

Nom maillage	Nombre de nœuds	Nombre d'éléments
M835	835	236
M1593	1593	474
M2591	2591	792
M3829	3829	1190
M5307	5307	1668
M7025	7025	2226

Tab. 2.7 – Données utilisées pour le calcul par éléments finis en 3D

Configuration de référence	$R_p(m)$	$R_a(m)$	p (bar)	$E_\ell H(N/m)$	$G_{\ell t} H$
naturelle $\Omega_\emptyset$	0,05	1	0,5	$2,1 \cdot 10^5$	$5,2 \cdot 10^3$

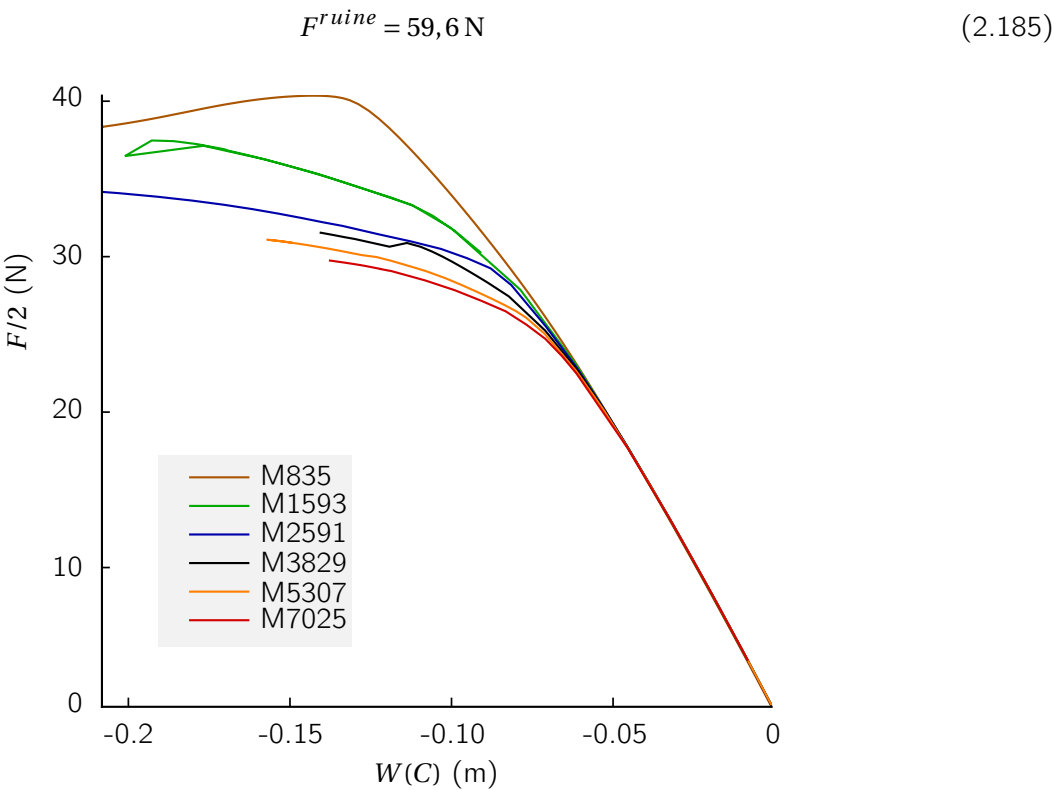


Fig. 2.58 – Courbes force-déplacement calculées par le code 3D en fonction du maillage.

Ces résultats sont comparés aux résultats de l'élément fini poutre gonflable. Le résultat de ce calcul dépend de la valeur du moment de flexion provoquant le pli. La précontrainte n'étant pas homogène sur l'arche, trois cas sont considérés.

- (1) $\Sigma_I^0 = 1000\text{ N/m}$

(2) $\Sigma_I^0 = 1250\text{ N/m}$

(3) $\Sigma_I^0 = 1500\text{ N/m}$

(2.186)

Les données du calcul sont rappelées dans le tableau 2.8. Les formules de variations géométriques et matérielles ne sont pas connues dans le cas d'une arche, on choisit d'utiliser les données de la configuration naturelle comme référence pour les propriétés mécaniques. Les rayons R_a et R_p sont mesurés dans la configuration pressurisée à partir des résultats du calcul en 3 dimensions.

Tab. 2.8 – Données utilisées pour le calcul par élément fini poutre

Configuration de référence	$R_p(\text{m})$	$R_a(\text{m})$	p (bar)	$E_\ell H(\text{N/m})$	$G_{\ell t} H$
initiale Ω_0	0,0505	1,02	0,5	$2,1 \cdot 10^5$	$5,2 \cdot 10^3$

La figure 2.60 permet de comparer les résultats issus des deux méthodes de calcul. La courbe EF poutre 1 correspond à la précontrainte $\Sigma_I^0 = 1000\text{ N/m}$, la courbe EF poutre 2 correspond à la précontrainte $\Sigma_I^0 = 1250\text{ N/m}$ et la courbe EF poutre 3 correspond à la précontrainte $\Sigma_I^0 = 1500\text{ N/m}$. Les allures sont cohérentes entre les deux méthodes. Les résultats en considérant le cas 3 pour la précontrainte (*i.e.* $\Sigma_I^0 = 1500\text{ N/m}$) sont les plus pertinents. Les charges de pli et de ruine varient selon la valeur choisie pour la précontrainte comme le montre la figure 2.61. L'algorithme utilisé pour le calcul par éléments-finis de type poutre (fig. 2.38) nécessite l'identification du moment de flexion en chaque point. Ce moment de flexion étant connu, un indicateur est défini pour connaître l'état d'une section à un chargement donné. Les points pour lesquels le moment de flexion est inférieur au moment de pli apparaissent en vert, les points pour

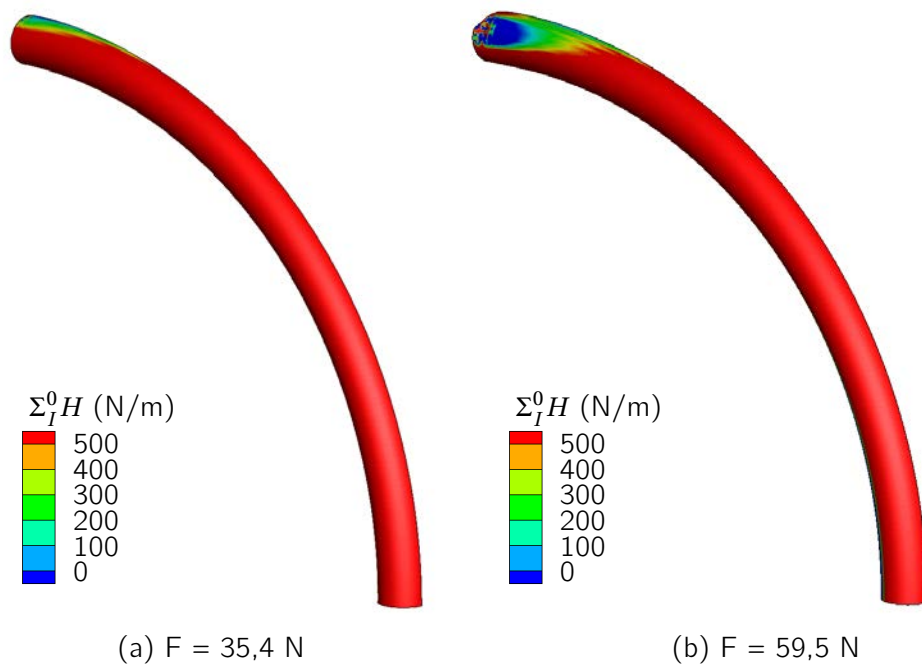


Fig. 2.59 – Identification des charges de pli (a) et de ruine (b) par la modélisation en 3D et déformées associées.

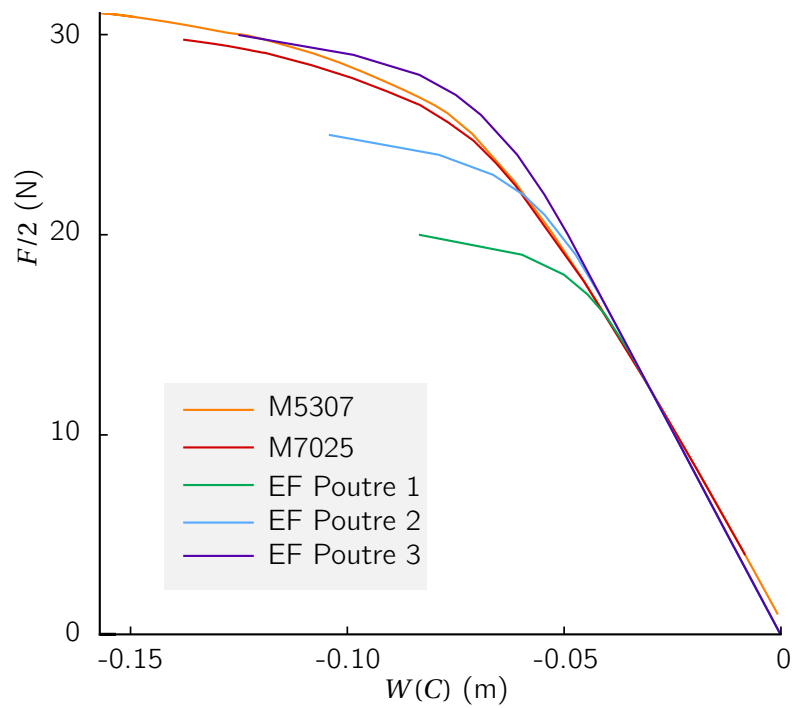


Fig. 2.60 – Comparaison du déplacement vertical en C calculé par le code 3D et l'élément fini poutre gonflable.

lesquels le moment de flexion est compris entre le moment de pli et le moment de ruine apparaissent en orange et les points pour lesquels la ruine est atteinte sont en rouge. Cet outil permet en plus d'afficher et de mesurer la zone détendue.

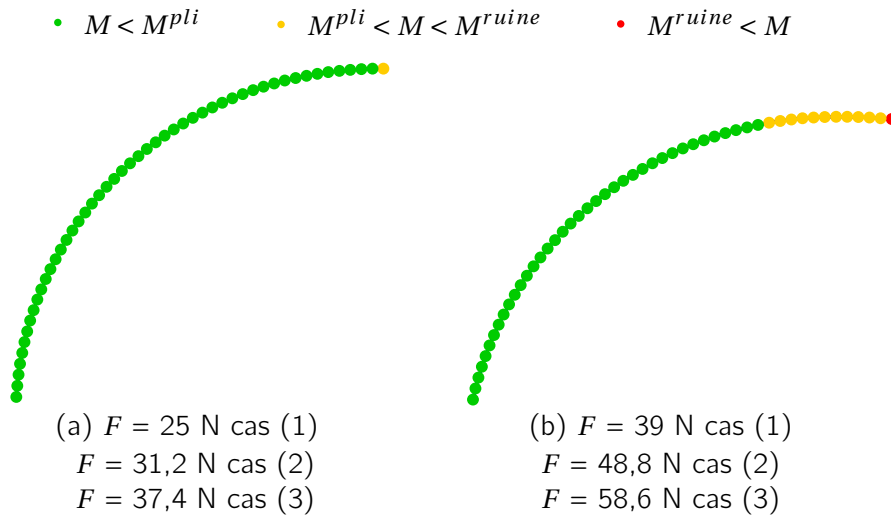


Fig. 2.61 – Identification des charges de pli (a) et de ruine (b) par la modélisation élément fini de poutre gonflable et déformées associées.

En conclusion, l'utilisation de l'élément fini est envisageable pour traiter un problème complexe sous réserve de connaître la distribution de la pré-contrainte. Dans le cadre du dimensionnement d'une membrane la pré-contrainte doit être homogène, cette condition nécessite un travail de recherche de forme en amont du dimensionnement proprement dit. L'étude d'une poutre droite ne nécessite pas une telle démarche puisque la pré-contrainte est homogène. Dans le cas d'une arche, ce n'est plus vrai, il faut donc considérer cet aspect en identifiant la forme dans la configuration naturelle permettant l'obtention d'une précontrainte homogène dans la configuration initiale. L'étude sur la partie linéaire du comportement ne nécessite pas de précaution particulière.

2.9 Conclusion

L'objectif proposé dans ce chapitre est l'enrichissement et le développement de modèles pour prévoir la charge de ruine et le déplacement d'une poutre gonflable, et plus particulièrement lorsque cette dernière est affectée par la présence d'un pli. Les travaux menés ont permis la formulation de la charge de ruine à partir de l'étude de la contrainte dans une section pliée. La charge de ruine correspond alors à un maximum de la courbe force déplacement et est indépendante du matériau constitutif de la poutre. Un autre résultat important est le niveau de propagation du pli à la ruine. Lorsque la charge de ruine est atteinte, le pli affecte la moitié de la section. Ces résultats sont confirmés par une étude numérique puis par une étude expérimentale. Le travail a également abouti à un analytique permettant de décrire le déplacement post-plissage d'une poutre gonflable. Une solution alternative pour prévoir le déplacement est aussi proposée par l'intermédiaire de l'adaptation d'un élément fini de poutre gonflable. La matrice de rigidité est adaptée, par l'intermédiaire d'un changement de géométrie, pour tenir compte de la présence du pli dans une section de la poutre. Ces deux modèles de déplacements ont été comparés entre-eux et confrontés à des résultats expérimentaux et aux résultats d'une simulation en 3D. On dispose à présent d'outils rendant possible la modélisation du déplacement d'une poutre gonflable tout au long du chargement.

Chapitre 3

Adaptation et développement d'outils de mesure pour les structures gonflables

Résumé : Ce chapitre est dédié à la mesure de structures gonflables. La majorité des études expérimentales sur des poutres gonflables trouvées dans la littérature concerne la partie linéaire de la courbe force-déplacement. L'étude de cette partie du comportement permet de poser l'hypothèse des petites perturbations et rend alors possible l'utilisation d'un appareillage classique comme des capteurs de force ou de déplacement ou encore des extensomètres. Cependant, le travail proposé dans la thèse repose également sur l'étude de la partie non-linéaire de la courbe force-déplacement. Les outils classiques ne sont pas les plus adaptés dans la mesure où ils permettent seulement l'étude d'un point et qu'ils peuvent être difficiles à fixer sur une structure textile. Une mesure de champ sans contact permettant l'étude d'une infinité de points est plus adéquate. On propose donc d'adapter et d'utiliser une méthode récente et innovante, la corrélation d'image virtuelle (VIC). Cette méthode repose sur l'étude d'une image de la déformée d'une structure sur laquelle est corrélée une image virtuelle construite à partir d'une courbe paramétrée. Cette courbe paramétrée est construite à partir des modèles développés au chapitre 2. La VIC permet alors de mesurer un déplacement tout en ajustant les modèles ou les paramètres des modèles et en quantifiant l'écart avec la déformée de la structure étudiée. Cette méthode permet de rendre compte de l'adéquation des modèles. Les modèles utilisés pour construire l'image virtuelle font intervenir des paramètres tels que le chargement ou les propriétés mécaniques. Un simple post-traitement des résultats de la corrélation permet de déduire ces paramètres à partir de la déformée mesurée. Cet outil peut alors s'avérer pertinent pour identifier le chargement appliqué par le vent sur une structure en soufflerie. On propose également de développer des capteurs de pression pour mesurer le chargement de vent en soufflerie et comparer les résultats de la VIC à ceux issus d'une méthode plus classique.

3.1 Introduction	95
3.2 La Corrélation d'Image Virtuelle	97
3.2.1 L'image virtuelle	97
3.2.2 La fonction de corrélation	99
3.2.3 Algorithme de résolution	99
3.2.4 Équation de la déformée d'une poutre gonflable	99
3.3 Validation sur une image de synthèse	103
3.3.1 Construction de l'image de synthèse de référence	103
3.3.2 Étude de l'image synthétique	104
Initialisation de l'image virtuelle	104
Résultats	105
Répétabilité de l'identification	106
3.3.3 Influence de la largeur du contour virtuel	106
3.3.4 Influence d'un bruit gaussien sur la solution	107
3.4 Utilisation sur des images expérimentales	109
3.4.1 Dispositif expérimental	109
Réalisation d'une poutre console gonflable	109
Appareillage et matériel optique	110
Descripteur utilisé pour la mesure par VIC	112
3.4.2 Protocole expérimental	113
3.4.3 Résultats	114
3.5 Développement de capteurs de pression	119
3.5.1 Recherche de forme	119
3.5.2 Fabrication	120
Contraintes géométriques	120
Procédé de fabrication	120
3.5.3 Test des capteurs en soufflerie	121
Dispositif expérimental	121
Résultats	123
3.6 Conclusion	125

Notations Principales

- Systèmes de coordonnées :

$\mathcal{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	Base globale cartésienne
(X, Y, Z)	Coordonnées cartésiennes
$\bar{\mathcal{B}}(\vec{e}_{\bar{x}}, \vec{e}_{\bar{y}}, \vec{e}_{\bar{z}})$	Base locale cartésienne
(s, r)	coordonnées curvilignes
ξ	abscisse curviligne réduite
(r, ϕ)	coordonnées cylindriques
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	Angles d'Euler
M	point quelconque
$\vec{e}_n$	Vecteur normal unitaire
$\vec{e}_\tau$	Vecteur tangent unitaire

- Géométrie :

L	Longueur de la poutre
R	Rayon de la poutre
H	Épaisseur du tissu
S	Section droite
I	Moment quadratique

- Cinématique :

$\mathbf{U}$	Champ de déplacement
(U, V, W)	Composantes du champ de déplacement
θ_Δ	Rotation de section autour de l'axe Δ

- Chargement :

F	Force concentrée
p	Pression de gonflage
$P = p\pi R^2$	Résultante de pression

- Corrélation :

F	Image physique
G^*	Image Virtuelle
$\mathcal{C}$	Courbe paramétrée représentative du descripteur
$\vec{x}$	Vecteur position d'un point de $\mathcal{C}$
$\vec{X}$	Position d'un point de l'image virtuelle
λ_k	Paramètres de contrôle de la courbe $\mathcal{C}$
Φ_c	Fonction de corrélation
B	Demi-épaisseur de l'image virtuelle
L_c	Longueur de l'image virtuelle
S^*	Surface de l'image virtuelle

- Propriétés mécaniques du matériau :

E_ℓ Module de Young longitudinal

E_t Module de Young transverse

$G_{\ell t}$ Module de cisaillement

$\nu_{\ell t}$ Coefficient de Poisson

- Coefficients :

k Coefficient de section réduite

A_1 Rigidité de flexion adimensionnée

A_2 Rigidité de cisaillement adimensionnée

- Statistiques :

σ_a Écart type de la variable a

μ_a Moyenne de la variable a

$\mathcal{N}$ Loi Normale

- Autres :

t temps

3.1 Introduction

Les enjeux de ce chapitre reposent sur deux nécessités :

- la nécessité de mesurer le déplacement pour analyser les essais futurs et vérifier la qualité des modèles : ce qui implique que la méthode de mesure choisie soit compatible avec les grands déplacements. La méthode retenue doit prendre en compte les contraintes liées à la réalisation d'essais en soufflerie et les contraintes liées à la nature même des structures textiles.
- le deuxième enjeu est la caractérisation d'un chargement complexe tel que le vent sur une structure gonflable.

La mesure sur les structures gonflables est particulière puisque ces dernières présentent un comportement spécifique, notamment par le fait qu'elles travaillent en grands déplacements. La nature même du gonflable impose l'utilisation d'outils adaptés. Ce sont des structures légères sur lesquelles l'ajout d'appareils de mesure peut avoir un impact sur la réponse structurelle, la masse ajoutée n'étant pas toujours négligeable devant la masse de la structure elle-même. Par ailleurs, le textile étant souvent structuré et étanche, on limite au maximum les éventuels percage pour positionner des objets en des points précis. Les principales mesures réalisées dans la littérature sont relatives à l'étude de la partie linéaire de la courbe force-déplacement, la limitation à cette première partie du comportement permet d'éliminer la problématique des grands déplacements. Les mesures sont alors effectuées avec un appareillage classique comme des capteurs de déplacements de type LVDT [Ngu14] ou des potentiomètres à câble [MDPT09] par exemple. Ces techniques restent limitées à l'étude de points particuliers au niveau desquels sont installés les capteurs. L'étude d'un grand nombre de points nécessite l'utilisation d'autant de capteurs. Une alternative est alors l'utilisation de système de suivi de cibles (tracking), moins onéreux, qui permet de suivre la trajectoire de plusieurs points avec un seul appareil (ou système d'acquisition). La structure étudiée est alors équipée de cibles réfléchissant les infrarouges dont les déplacements sont enregistrés par un réseau de caméras. Les cibles sont généralement découpées dans un papier suffisamment fin pour ne pas modifier le comportement de la structure support par l'ajout de masse. Un tel système est par exemple utilisé par [XG12] pour l'étude d'un réflecteur solaire sur une antenne gonflable. Le suivi de cibles est compatible avec les grands déplacements tant que les points équipés restent dans le champ de vision du système d'acquisition. De tels systèmes peuvent être mis en application en soufflerie, ce qui est un avantage au regard des objectifs de la thèse : comme pour les méthodes optiques en général, le tracking ne nécessite aucun contact entre la structure étudiée et système de mesure. Cet équipement peut être installé hors de la veine d'essai de la soufflerie. L'inconvénient d'une mesure de ce type est qu'elle reste locale : il faut multiplier les points d'acquisition pour pouvoir comparer les résultats expérimentaux aux modèles avec une précision de l'ordre du millimètre.

Une mesure de champ par Corrélation d'Image Digitale (DIC) (corrélation d'images numériques) peut se substituer à l'utilisation de jauges ou d'extensomètres [GHDS92][Wit15] et permet de suivre le comportement d'une infinité de points en une seule fois. Les mesures de champ sont de plus en plus utilisées en mécanique expérimentale pour la mesure du champ de déplacement d'un solide [Ras00]. Les mesures de champ offrent généralement l'opportunité de quantifier l'écart entre les modèles et les essais par l'intermédiaire du champ à identifier (**U** dans le cas du déplacement). L'état de l'art établi par Hild et Roux [HR06] montre l'étendue du domaine d'application de telles méthodes : Callcoch et al. [CHD⁺01] contrôlent la qualité de réalisation des conditions limites sur un essai mécanique. L'avantage principal proposé par les mesures de champ est qu'elles constituent une solution à la mise en œuvre de mesures sans contact particulièrement pertinentes pour l'étude de structures sur lesquelles les jauges ne sont pas adaptées comme les polymères [CCHM] le bois et le papier [CTH91] ou encore des laines minérales [RBRC02].

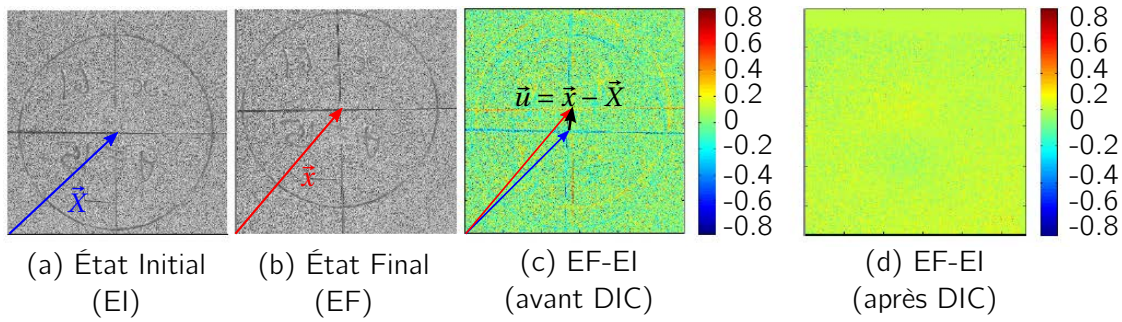


Fig. 3.1 – Principe de la Corrélation d'Image Digitale : (a) état initial, (b) l'état final, (c) différence avant minimisation et (d) différence après minimisation (Source : logiciel DigImCo - Marc François).

La DIC consiste à minimiser l'écart entre deux images d'une même structure à deux instants différents comme détaillé sur la figure 3.1. L'état initial (a) est défini par une image dont le niveau de gris normé est f et l'état final (b) est défini par une image dont le niveau de gris normé est g . Un point de est repéré par le vecteur $\vec{X}$ à l'état initial et le vecteur $\vec{x}$ à l'état final. Le déplacement $\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$ est identifié en minimisant la fonction de corrélation

$$\Phi_{DIC} = \iint (f(\vec{X} + \vec{u}) - g(\vec{x}))^2 dS \quad (3.1)$$

sur la surface S de l'image.

La DIC est introduite par Burt et al. [BYX82] au début des années 1980 puis par Sutton et al. [SWP⁺83] qui mesurent les déplacements d'une poutre console à l'aide de cette méthode, le champ de déplacement obtenu est comparé avec succès aux résultats de la théorie des poutres. La DIC s'avère également être un outil performant pour la résolution du problème inverse comme l'identification des propriétés élastiques d'un matériau à partir du champ de déplacement [GHP02][HR06] ou des applications plus complexes comme l'identification de loi d'endommagement [CHR07]. La DIC est utilisée sur des textiles par [PFTB15] qui s'intéressent à la position des fibres dans un textile cisailé. L'état de l'art montre la capacité de la méthode à mesurer des déplacements subpixels. L'application d'une telle méthode sur des structures gonflables est limitée par deux aspects :

- la mesure par DIC nécessite d'appliquer un mouchetis sur la surface de la structure, ce qui implique de trouver une peinture adaptée qui soit extensible (pour supporter la mise sous pression) et légère (l'épaisseur du tissu étant très faible) ;
- la performance de la méthode est limitée en grands déplacements puisque les images traitées pour déterminer le champ de déplacement doivent se recouper. Une solution serait de filmer la structure durant son déplacement pour effectuer la mesure par étape. Cette solution réduit cependant la qualité du résultat par l'accumulation des erreurs de corrélation à chaque étape. De plus, le temps de traitement est long.

La Corrélation d'Image Virtuelle (VIC) est introduite dans les travaux de François *et al.* [FSA10] pour la mesure de la forme d'un fil dans un écoulement. C'est une méthode récente et innovante qui permet de répondre aux deux aspects évoqués dans la problématique en s'affranchissant des limitations de la DIC : c'est une mesure de champ sans contact applicable en soufflerie. La méthode est introduite puis présentée dans ce chapitre puis illustrée à l'aide de cas tests, en premier lieu sur des images de synthèse pour lesquelles les paramètres sont connus de façon déterministe puis, en second lieu, sur des images expérimentales. En fin de chapitre, des capteurs de pression adaptés aux structures gonflables sont développés pour la caractérisation du chargement extérieur.

3.2 La Corrélation d'Image Virtuelle

3.2.1 L'image virtuelle

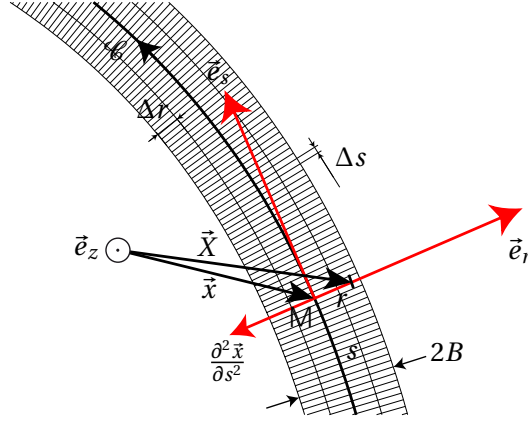


Fig. 3.2 – Paramétrage de l'image virtuelle.

L'image virtuelle, présentée sur la figure 3.2, est construite en 2 dimensions à partir d'une courbe analytique $\mathcal{C}$ définie par exemple par une somme de courbures élémentaires [FSA10][Sem10][SAF11] ou par des B-Splines [RF14]. Le vecteur $\vec{x}$ définit le point courant de la courbe $\mathcal{C}$ et le vecteur $\vec{X} = \vec{x} + r\vec{e}_r$ désigne le point courant associé de l'image virtuelle. L'image virtuelle est discrétisée par l'intermédiaire d'un maillage généralement trois fois plus fin que l'échelle du pixel. Le repère curviligne local est défini au point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne s par le vecteur tangent unitaire $\vec{e}_s$ et le vecteur normal unitaire $\vec{e}_r$. Les coordonnées s et r se discrétisent respectivement par Δs et Δr (fig. 3.2). L'épaisseur de l'image virtuelle est $2B$.

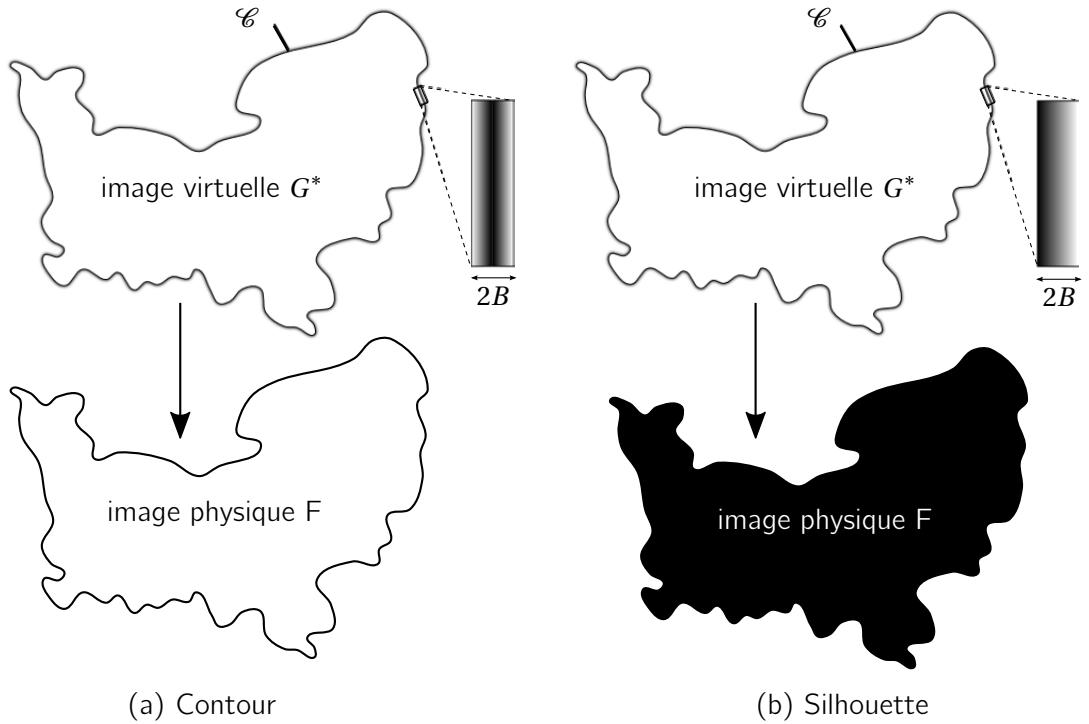


Fig. 3.3 – Exemples d'images physiques à mesurer : (a) contour et (b) silhouette.

Deux types d'images virtuelles peuvent être créés pour la détection d'un contour ou d'une silhouette. La figure 3.3 donne un exemple d'image physique pour chacun des deux types. Dans les deux cas, l'expression

de la courbe $\mathcal{C}$ est la même. La distinction est effectuée lors de l'attribution des niveaux de gris $g(r)$ de l'image virtuelle. Ces derniers sont définis dans l'épaisseur $2B$ de l'image virtuelle et varient linéairement entre 0 (noir) et 1 (blanc). Les deux évolutions sont proposées sur la figure 3.4 : $g(r) = g^c(r)$ dans le cas d'un contour ou $g(r) = g^s(r)$ dans le cas d'une silhouette. Les définitions des niveaux de gris associés sont alors :

$$g^c(r) = \left| \frac{r}{B} \right| \quad r \in [-B, B] \quad (3.2)$$

$$g^s(r) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{B} \right) \quad r \in [-B, B] \quad (3.3)$$

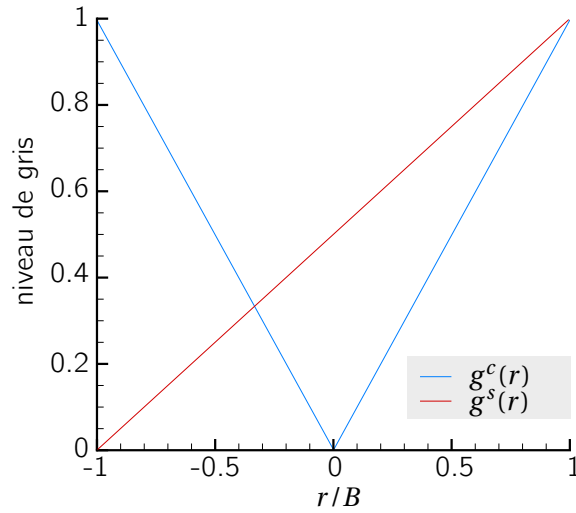


Fig. 3.4 – Représentation des niveaux de gris : cas du contour (en bleu) et de la silhouette (en rouge).

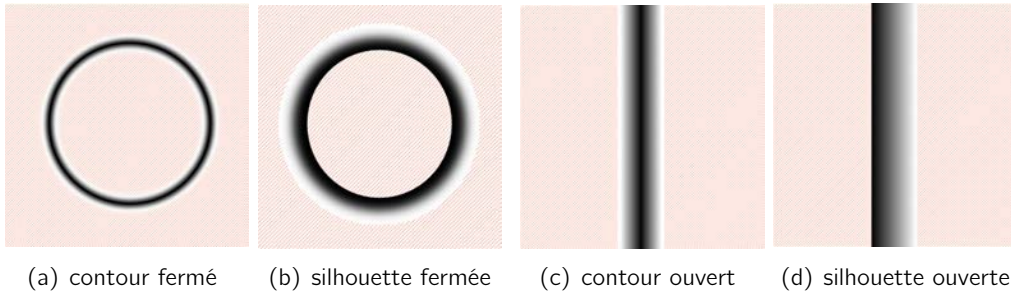


Fig. 3.5 – Images virtuelles typiques.

On obtient alors des images virtuelles adaptées à la mesure à effectuer. Des exemples d'images virtuelles classiques sont donnés sur la figure 3.5. La courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par un nombre fini de paramètres λ_k tels que la position $\vec{x}$ d'un point courant de $\mathcal{C}$ s'écrit :

$$\vec{x} = \vec{x}(s, \lambda_k) \quad (3.4)$$

Ces paramètres de contrôle peuvent être de nature géométrique (une longueur, un angle, un rayon) ou de nature mécanique (propriétés mécaniques, paramètres d'un chargement...). Finalement, la courbe $\mathcal{C}$ peut être générique (B-Splines, etc...) ou inspirée d'une solution analytique ou numérique. Dans ces derniers cas les paramètres de contrôle donnent directement accès soit au chargement soit aux propriétés matériaux recherchées. L'image virtuelle est déformée, en faisant varier les paramètres de contrôle λ_k , jusqu'à trouver

la position optimale sur l'image physique.

3.2.2 La fonction de corrélation

Ce paragraphe présente une synthèse des travaux menés par Rhétoré et François [RF14]. Les niveaux de gris de l'image physique et de l'image virtuelle sont respectivement désignés par $F(\vec{X})$ et $G^*(\vec{X})$. La meilleure corrélation entre les deux images consiste à trouver la position $\vec{X}$ des points du contour virtuel pour laquelle la somme des différences quadratiques

$$\psi = \int \int_{S^*} [F(\vec{X}) - G^*(\vec{X})]^2 dS^* \quad (3.5)$$

est minimale sur la surface S^* de définition de l'image virtuelle. La surface S^* de l'image virtuelle n'est pas constante et dépend elle aussi des paramètres de contrôle λ_k . La prise en compte de la surface dans la minimisation fait apparaître des tensions de ligne qui tendent à réduire cette surface impliquant ainsi des imprécisions dans la corrélation. La fonction de corrélation Φ_c à minimiser est finalement :

$$\Phi_c = \frac{\psi}{S^*} \quad (3.6)$$

Dans le cas de la VIC la minimisation est réalisée seulement pour les pixels de l'image physique en correspondance avec l'image virtuelle. Les temps de calcul sont donc réduits et dépendent directement de l'épaisseur $2B$ de l'image virtuelle.

3.2.3 Algorithme de résolution

Le processus de minimisation s'effectue selon les étapes suivantes :

- Initialisation des paramètres de contrôle λ_k pour positionner l'image virtuelle sur le contour ou la silhouette physique à détecter ;
- Définition de la demi-épaisseur B de l'image virtuelle pour initier la minimisation ;
- Minimisation de la fonction de corrélation Φ_c (cf éq. 3.6) par la méthode de la plus grande pente par le calcul du gradient $\partial\Phi_c/\partial V_k$;
- Diminution de la demi-épaisseur B de l'image virtuelle.
- Arrêt de la procédure quand la fonction de corrélation Φ_c ne varie plus entre deux itérations successives, davantage de précisions sont disponibles dans [RF14].

3.2.4 Équation de la déformée d'une poutre gonflable

La VIC offre la possibilité de choisir la nature de la courbe $\mathcal{C}$, que l'on appellera descripteur, à utiliser selon le problème étudié. On s'inspire de [HR06][PLRH09] qui utilisent des solutions mécaniques paramétrées comme bases de champ de déplacement en DIC pour construire un descripteur adapté à l'étude de poutres gonflables. On propose d'illustrer la démarche en considérant une poutre gonflable biappuyée, de section circulaire de rayon R et de longueur L soumise à une charge concentrée F en son milieu. La poutre est considérée orthotrope, de module de Young longitudinal E_ℓ et de module de cisaillement $G_{\ell t}$. La base globale $\mathcal{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est la base de l'image. On se dote d'une base locale, propre à la poutre étudiée, $\mathcal{B}(\vec{e}_{\bar{x}}, \vec{e}_{\bar{y}}, \vec{e}_{\bar{z}})$. La solution pour le déplacement V et la rotation de section θ_z est donnée dans cette base locale $\mathcal{B}$ par Nguyen [Ngu14] (cf chapitre 2) :

$$\theta_z(\vec{X}) = \begin{cases} \frac{F}{16(E_\ell + P/S)I} (L^2 - 4\bar{X}^2) & \text{si } \bar{X} \in [0, L/2] \\ \frac{F}{16(E_\ell + P/S)I} (4(\bar{X} - L)^2 - L^2) & \text{si } \bar{X} \in [L/2, L] \end{cases} \quad (3.7)$$

$$V(\bar{X}) = \begin{cases} \frac{F\bar{X}}{48(E_\ell + P/S)I} (3L^2 - 4\bar{X}^2) + \frac{F\bar{X}}{2(P + kG_{\ell t}S)} & \text{si } \bar{X} \in [0, L/2] \\ \frac{F(L-\bar{X})}{48(E_\ell + P/S)I} (8L\bar{X} - 4\bar{X}^2 - L^2) + \frac{F(L-\bar{X})}{2(P + kG_{\ell t}S)} & \text{si } \bar{X} \in [L/2, L] \end{cases} \quad (3.8)$$

Le terme $P = p\pi R^2$ traduit l'effet de la pression de gonflage p . On définit les nombres adimensionnés A_1 et A_2 tels que :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{FL^2}{(E_\ell + P/S)I} \\ A_2 &= \frac{F}{P + kG_{\ell t}S} \end{aligned} \quad (3.9)$$

qui permettent d'écrire les systèmes (3.7) et (3.8) sous la forme suivante :

$$\theta_z(\bar{X}) = \begin{cases} \frac{A_1}{16} \left(1 - 4\left(\frac{\bar{X}}{L}\right)^2\right) & \text{si } \bar{X} \in [0, L/2] \\ \frac{A_1}{16} \left(4\left(\frac{\bar{X}}{L} - 1\right)^2 - 1\right) & \text{si } \bar{X} \in [L/2, L] \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\frac{V(\bar{X})}{L} = \begin{cases} \frac{A_1}{48} \left(\frac{\bar{X}}{L}\right) \left(3 - 4\left(\frac{\bar{X}}{L}\right)^2\right) + \frac{A_2}{2} \left(\frac{\bar{X}}{L}\right) & \text{si } \bar{X} \in [0, L/2] \\ \frac{A_1}{48} \left(1 - \frac{\bar{X}}{L}\right) \left(8\frac{\bar{X}}{L} - 4\left(\frac{\bar{X}}{L}\right)^2 - 1\right) + \frac{A_2}{2} \left(1 - \frac{\bar{X}}{L}\right) & \text{si } \bar{X} \in [L/2, L] \end{cases} \quad (3.11)$$

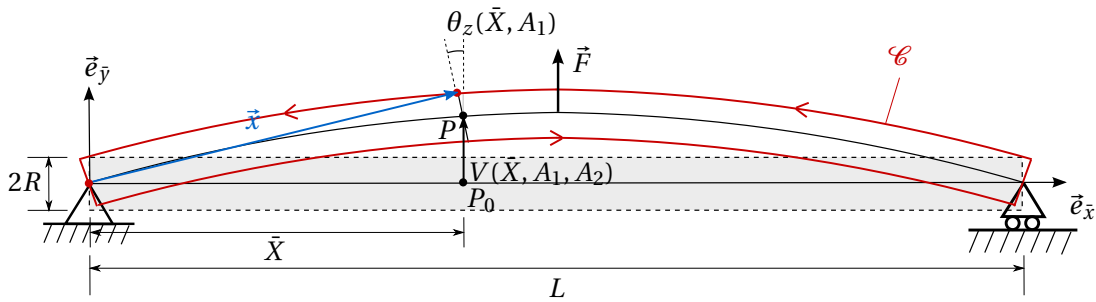


Fig. 3.6 – Construction du contour à partir de la déformée d'une poutre gonflable.

Ces équations permettent d'écrire la position $\vec{x}$ d'un point M du contour en considérant une cinématique de Timoshenko. La construction du contour est illustrée sur la figure 3.6, la configuration initiale est représentée en gris et la configuration déformée en rouge. La position $\vec{x}$ d'un point est finalement donnée par :

$$\vec{x} = (\bar{X} \pm R \sin \theta_z) \vec{e}_{\bar{x}} + (V \pm R \cos \theta_z) \vec{e}_{\bar{y}} \quad (3.12)$$

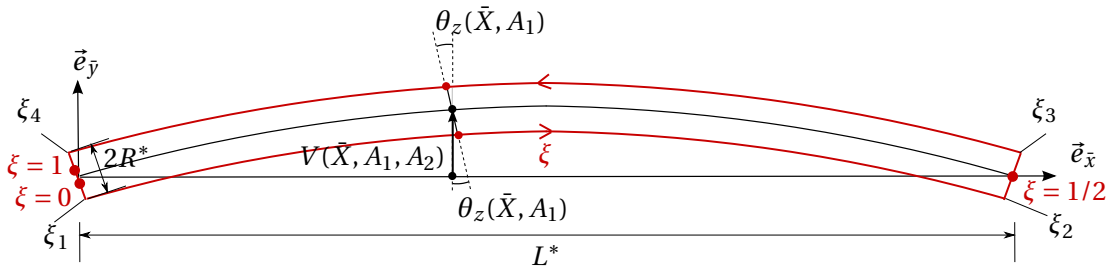


Fig. 3.7 – Définition de l'abscisse curviligne du descripteur $\mathcal{C}$ et décomposition en intervalles.

L'image virtuelle est créée de manière similaire à ce contour. On note L^* et R^* les dimensions du contour virtuel. La longueur L_c de ce contour est alors :

$$L_c = 2(2R^* + L^*) \quad (3.13)$$

Soit ξ un paramètre d'abscisse curviligne du descripteur $\mathcal{C}$ variant de 0 à 1 tel que :

$$\xi = \frac{s}{L_c} \quad (3.14)$$

La figure 3.7 présente le contour virtuel qui peut se décomposer en 6 intervalles :

$$\begin{aligned} I_1 &= [0, \xi_1[\\ I_2 &= [\xi_1, \xi_2[\\ I_3 &= [\xi_2, 1/2[\\ I_4 &= [1/2, \xi_3[\\ I_5 &= [\xi_3, \xi_4[\\ I_6 &= [\xi_4, 1] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Chaque point est défini par un couple $(\bar{X}, r)$, dans la base locale $\bar{\mathcal{B}}$ de la poutre, tel que :

$$\bar{X}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in I_1 \cup I_6 \\ \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} L^* & \text{si } \xi \in I_2 \\ L^* & \text{si } \xi \in I_3 \cup I_4 \\ \left(1 - \frac{\xi - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3}\right) L^* & \text{si } \xi \in I_5 \end{cases} \quad (3.16)$$

et,

$$r(\xi) = \begin{cases} -\frac{\xi}{\xi_1} R^* & \text{si } \xi \in I_1 \\ -R^* & \text{si } \xi \in I_2 \\ -\left(1 - \frac{\xi - \xi_2}{1/2 - \xi_2}\right) R^* & \text{si } \xi \in I_3 \\ \frac{\xi - 1/2}{\xi_3 - 1/2} R^* & \text{si } \xi \in I_4 \\ R^* & \text{si } \xi \in I_5 \\ \left(1 - \frac{\xi - \xi_4}{1 - \xi_4}\right) R^* & \text{si } \xi \in I_6 \end{cases} \quad (3.17)$$

L'équation du contour virtuel dans la base locale $\bar{\mathcal{B}}$ est alors :

$$\bar{\mathbf{x}}(\xi) = [\bar{X}(\xi) + r(\xi) \sin \theta_z(\bar{X}(\xi))] \bar{\mathbf{e}}_{\bar{x}} + [V(\xi) + r(\xi) \cos \theta_z(\bar{X}(\xi))] \bar{\mathbf{e}}_{\bar{y}} \quad (3.18)$$

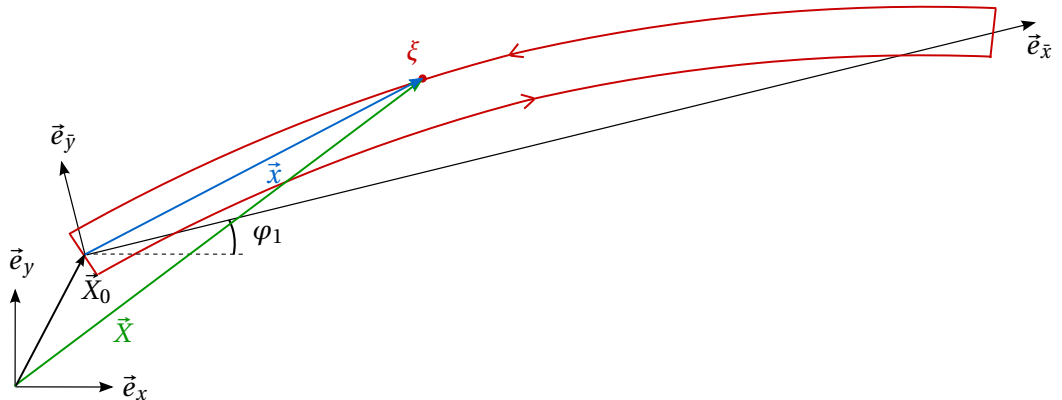


Fig. 3.8 – Définition des points du contour à partir de la ligne neutre.

La figure 3.8 représente le descripteur dans la base globale $\mathcal{B}$. On définit l'origine de la poutre par le vecteur

$$\bar{\mathbf{X}}_0 = X_0 \bar{\mathbf{e}}_x + Y_0 \bar{\mathbf{e}}_y \quad (3.19)$$

On appelle φ_1 l'angle entre $\vec{e}_{\bar{x}}$ et $\vec{e}_x$. La position d'un point ξ du contour virtuel $\mathcal{C}$ est alors :

$$\vec{X}(\xi) = \vec{X}_0 + \vec{x}(\xi) \quad (3.20)$$

soit,

$$\vec{X}(\xi) = \begin{cases} X_0 + [\bar{X}(\xi) - r(\xi)\sin\theta_z(\bar{X}(\xi))]\cos\varphi_1 - [V(\xi) + r(\xi)\cos\theta_z(\bar{X}(\xi))]\sin\varphi_1 \\ Y_0 + [\bar{X}(\xi) - r(\xi)\sin\theta_z(\bar{X}(\xi))]\sin\varphi_1 + [V(\xi) + r(\xi)\cos\theta_z(\bar{X}(\xi))]\cos\varphi_1 \end{cases} \quad (3.21)$$

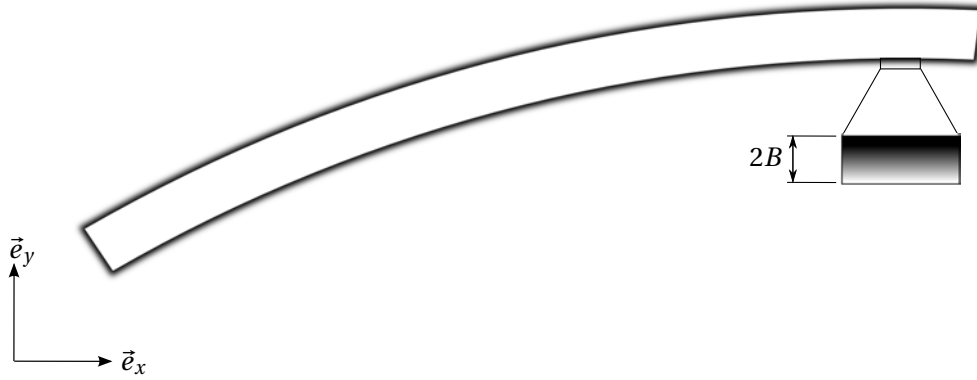


Fig. 3.9 – Image virtuelle obtenue à partir des équations de poutres gonflables.

On obtient finalement une image virtuelle d'épaisseur $2B$, représentée sur la figure 3.9, paramétrée par 7 variables λ_k :

- $\lambda_1 = X_0$, $\lambda_2 = Y_0$ et $\lambda_3 = \varphi_1$ définissent le mouvement de corps rigide, l'influence de ces paramètres de contrôle est présentée sur la figure 3.11 ;
- $\lambda_4 = L^*$, $\lambda_5 = R^*$ définissent la longueur du contour virtuel ;
- $\lambda_6 = A_1$, $\lambda_7 = A_2$ traduisent la déformation du contour. A_1 agit sur la partie parabolique de l'expression du déplacement V , c'est la contribution du terme de flexion. A_2 agit sur la partie linéaire de l'expression de V qui représente la contribution du terme cisaillement. L'influence des termes A_1 et A_2 sur la forme du contour créé est représentée sur la figure 3.10 ;

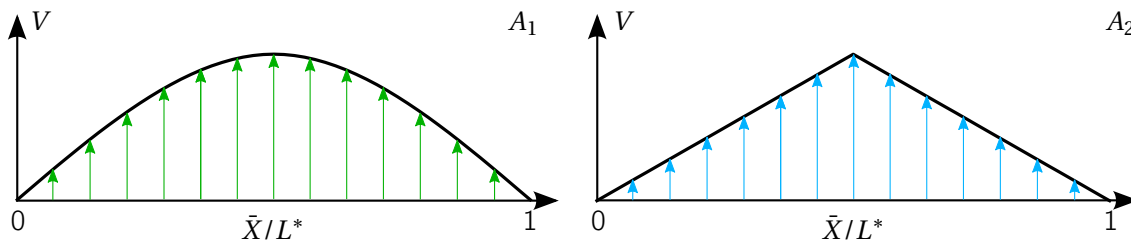


Fig. 3.10 – Influence des termes A_1 (gauche) et A_2 (droite) sur la déformée du contour virtuel.

La corrélation permet d'identifier chacun des termes λ_k , et plus particulièrement les termes λ_6 et λ_7 correspondant aux nombres adimensionnés A_1 et A_2 . Ceci permet, à partir du système (3.9), soit l'identification des propriétés mécaniques du matériau E_ℓ et $G_{\ell t}$ si la force F appliquée est connue, ou l'identification de la force F appliquée si les propriétés mécaniques du matériau E_ℓ et $G_{\ell t}$ sont connues.

La démarche de construction de l'image virtuelle présentée ici est généralisable à toutes les poutres quel que soit le chargement appliqué ou les conditions aux limites dès lors que des solutions analytiques pour le déplacement v et la rotation de section θ_z sont disponibles. Il suffit de remplacer les équations (3.7) et (3.8) par les solutions adéquates. Cette démarche est limitée aux petites déformations et aux problèmes

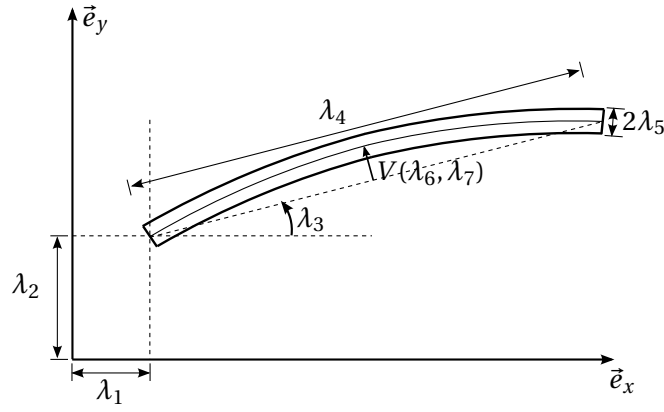


Fig. 3.11 – Influence des termes λ_1 à λ_7 sur le contour virtuel.

isostatiques pour lesquels de telles solutions analytiques sont disponibles. Pour traiter le cas des grandes déformations, des problèmes hyperstatiques ou hypostatiques, il est nécessaire d'utiliser un élément fini de type poutre gonflable et des méthodes numériques adaptées pour calculer le déplacement et la rotation de section. L'utilisation de l'élément fini permet également de traiter des géométries plus complexes comme des arches ou des assemblages de poutres.

3.3 Validation sur une image de synthèse

3.3.1 Construction de l'image de synthèse de référence

L'image choisie représente la ligne neutre d'une poutre gonflable de section circulaire, biappuyée soumise à une charge concentrée en son milieu. Le déplacement V et la rotation de section θ_z sont donnés par les équations (3.8) et (3.7). On rappelle que ces expressions peuvent s'écrire en fonction de deux nombres adimensionnés A_1 et A_2 de sorte que :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{FL^2}{(E_\ell + P/S)I} \\ A_2 &= \frac{F}{P + kG_{\ell t}S} \end{aligned} \quad (3.22)$$

On choisit pour ce cas test :

- une géométrie : la poutre est de longueur $L = 4$ m et de rayon $R = 0,1$ m et une pression de gonflage $p = 0,25$ bar ;
- un matériau : pour coller à la réalité, on utilise des coefficients matériau dont les ordres de grandeur correspondent à ceux de la littérature. On choisit pour la suite les résultats obtenus par [Ngu14] pour un tissu Ferrarri F302, modélisé comme un matériau orthotrope. Les produits des modules de Young longitudinal E_ℓ et transverse E_t et du module de cisaillement $G_{\ell t}$ avec l'épaisseur H du tissu est $E_\ell H = E_t H = 2,1 \cdot 10^5$ N/m, $G_{\ell t} H = 5,2 \cdot 10^3$ N/m ;
- un chargement : $F = 20$ N ;

Les termes adimensionnés sont alors : $A_1 = 0,482$ et $A_2 = 8,27 \cdot 10^{-3}$.

L'image de synthèse est construite à partir d'un maillage 6400×1600 pixels dont le niveau de gris est fixé à 0 (*i.e.* rectangle blanc). La déformée de la poutre est créée sur ce rectangle à partir de l'équation du contour (eq. 3.21) en considérant les valeurs obtenues pour A_1 et A_2 . On choisit une longueur arbitraire $L^* = 4000$ pixels et un rayon arbitraire $R^* = 16$ pixels. Ce contour constitue une limite, les pixels situés à l'intérieur ont un niveau de gris égal à 1 (*i.e.* noir) tandis que les pixels situés à l'extérieur conservent un niveau de gris égal à 0. L'image ainsi obtenue présente un passage brutal du noir au blanc. On propose

donc de créer des niveaux de gris intermédiaires en discrétisant l'image par intervalles de 16 pixels (1 pixel de l'image discrétisée est alors représenté par 256 pixels sur l'image non discrétisée). La valeur du niveau de gris correspond alors à la moyenne des niveaux de gris sur ces 256 pixels. L'image de synthèse créée est finalement de taille 400×100 pixels. La poutre synthétique présente un diamètre $2R^*$ égal à 2 pixels, ce qui est très faible. La longueur L^* de la poutre est de 250 pixels. Pour que l'exemple traité soit plus réaliste, une rotation de solide rigide $\varphi_1 = 3^\circ$ est appliquée. L'image de synthèse est l'objet de la figure 3.12, elle joue le rôle d'image physique pour la corrélation dans cette étude. L'image virtuelle est construite selon la méthode présentée précédemment.

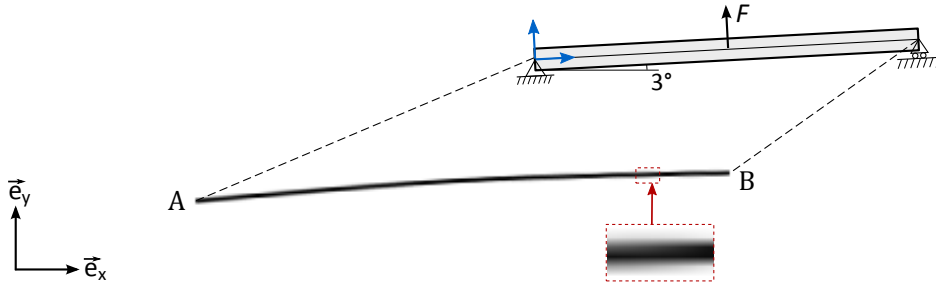


Fig. 3.12 – Image de synthèse utilisée comme image physique F.

3.3.2 Étude de l'image synthétique

On propose ici d'identifier les propriétés mécaniques (*i.e.* les termes A_1 et A_2) appliquées lors de la construction de l'image de synthèse (qui joue le rôle d'image physique) à l'aide de la VIC.

Initialisation de l'image virtuelle

On rappelle les paramètres de contrôle du descripteur :

- $\lambda_1 = X_0$, $\lambda_2 = Y_0$ et $\lambda_3 = \varphi_1$ définissent le mouvement de corps rigide ;
- $\lambda_4 = L^*$, $\lambda_5 = R^*$ définissent la longueur du contour virtuel ;
- $\lambda_6 = A_1$, $\lambda_7 = A_2$ traduisent la déformation du contour ;

Avant de commencer la minimisation, il est important de définir la position du contour physique à étudier sur l'image physique de référence. Il faut donc initialiser les paramètres λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 et λ_5 afin de définir le repère propre du contour virtuel. Soient $A(X_A, Y_A)$ et $B(X_B, Y_B)$ les extrémités de la poutre physique (fig. 3.12), les paramètres de contrôle sont initialisés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= X_A \\ \lambda_2 &= Y_A \\ \lambda_3 &= \text{atan}\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) \\ \lambda_4 &= \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le rapport entre L et R sur l'image physique est connu, ce qui permet l'initialisation de λ_5 :

$$\lambda_5 = \frac{R}{L} \lambda_4 \quad (3.24)$$

Il n'est pas nécessaire d'initialiser les termes λ_6 et λ_7 à une valeur différente de 0 pour effectuer la corrélation. Cependant, la forme de la déformée est connue (éq. (3.7) et (3.8)). On peut donc optimiser

la minimisation en initialisant le terme λ_6 par la saisie d'un point $C(X_C, Y_C)$ quelconque sur le contour. L'abscisse de ce point dans le repère local du contour virtuel est alors :

$$\bar{X}_C = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2} \quad (3.25)$$

le déplacement $V(C)$ du point C dans le repère local est obtenu par :

$$V(C) = -(X_C - X_A)\sin\varphi_1 + (Y_C - Y_A)\cos\varphi_1 \quad (3.26)$$

ce qui permet d'initialiser λ_6 à partir de l'équation (3.8) :

$$\lambda_6 = \begin{cases} \frac{48V(C)}{(3-4(\bar{X}_C/L^*)^2)\bar{X}_C} & \text{si } \bar{X}_C \in [0, L^*/2] \\ \frac{48V(C)}{(8\bar{X}_C/L^* - 4(\bar{X}_C/L^*)^2 - 1)(L^* - \bar{X}_C)} & \text{si } \bar{X}_C \in [L^*/2, L^*] \end{cases} \quad (3.27)$$

La demi-épaisseur B du contour virtuel n'est a priori pas connue, la valeur par défaut proposée est $B = \sqrt{2}R^*$.

Résultats

Les valeurs identifiées pour chaque paramètre par l'application de la VIC sont :

- $L^* = 249,85$ pixels (pour 250 pixels) ;
- $2R^* = 2,04$ pixels (pour 2 pixels) ;
- $\varphi_1 = 2,997^\circ$ (pour 3°) ;
- $A_1 = 0,490$ (pour 0,482) ;
- $A_2 = 0,008$ (pour 0,0083) ;

La mise en œuvre de la méthode donne de très bons résultats puisque les valeurs identifiées pour chaque paramètre de contrôle est obtenue avec un écart à la valeur théorique très faible. Le plus grand écart est observé sur le terme de cisaillement A_2 . Cependant, le résultat le plus important est la visualisation de l'image physique dans le repère du contour virtuel, ce résultat est présenté sur la figure 3.13. Cette donnée traduit la qualité de la corrélation. Dans le cas d'une corrélation parfaite, la moitié supérieure est noire et la moitié inférieure blanche. Cette figure met en lumière la qualité de la corrélation effectuée.

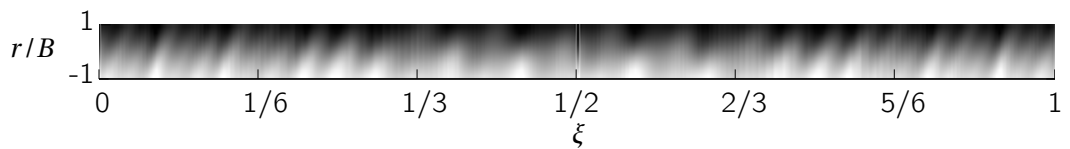


Fig. 3.13 – Image physique F visualisée dans le repère du contour virtuel G^* .

L'écart entre l'image physique et l'image virtuelle est donné à chaque itération par la valeur de la fonction de corrélation Φ_c . Le tracé de cette évolution sur la figure 3.14 montre une diminution très rapide de l'erreur de corrélation qui atteint une valeur inférieure à 1% en fin de corrélation. Les sauts sur la courbe correspondent à des diminutions successives de la demi-épaisseur B du contour virtuel. L'augmentation de l'erreur en début de minimisation s'explique par la recherche de la direction de minimisation. La position du contour virtuel sur l'image physique est présentée sur la figure 3.15.

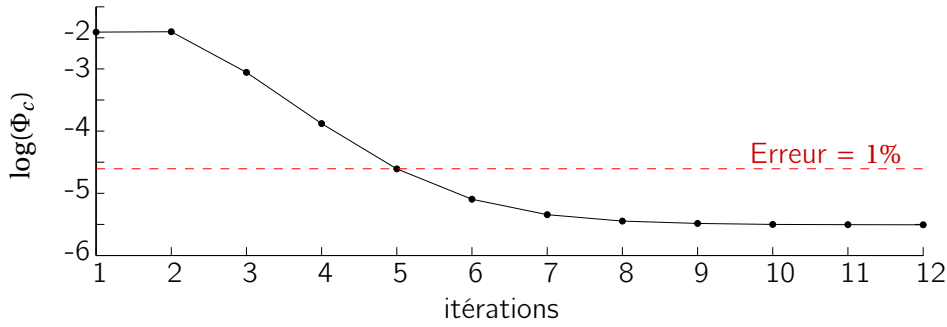


Fig. 3.14 – Convergence de la méthode.

CT1 : Poutre biappuyée avec charge concentrée au milieu
 $A_1 = 0,482$; $A_2 = 8,27e-3$; $\phi = 3^\circ$

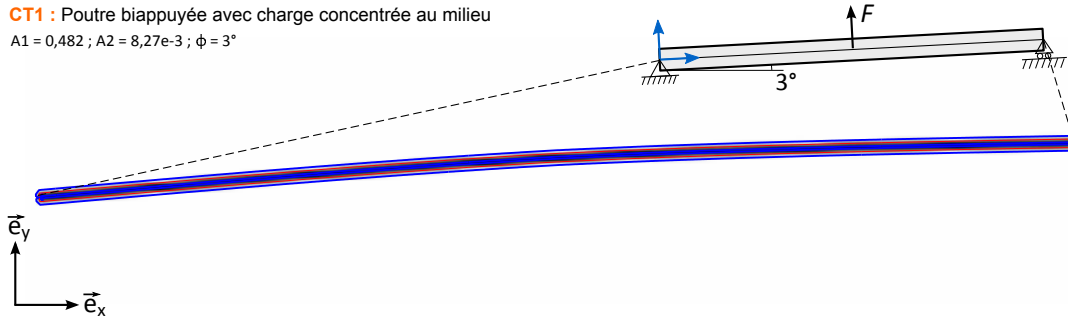


Fig. 3.15 – Position du contour virtuel sur l'image physique en fin de corrélation.

Finalement, le cas test sur une image de synthèse montre la performance et la précision de la méthode : les modules sont identifiés avec un écart relatif de 1,6% et de 3,2% entre les termes A_1 et A_2 mesurés et appliqués lors de la création de l'image physique. Cet écart est à comparer à la largeur de l'image physique qui est seulement de 2 pixels.

Répétabilité de l'identification

La stabilité de la solution est vérifiée en effectuant 200 identifications successives en maintenant à chaque fois les mêmes valeurs d'initialisation. La première initialisation est réalisée selon la procédure présentée précédemment puis les valeurs sont sauvegardées pour les identifications suivantes. Les résultats sont donnés sous la forme de coefficients de variation :

$$COV_a = \frac{\sigma_a}{\mu_a} \quad (3.28)$$

avec σ_a l'écart type et μ_a la moyenne de la grandeur a . Le calcul effectué sur les coefficients A_1 et A_2 mène à des coefficients de variation quasi-nuls, ce qui montre la stabilité de la solution.

$$\begin{cases} COV_{A_1} = 1,2 \cdot 10^{-5}\% \\ COV_{A_2} = 6,9 \cdot 10^{-5}\% \end{cases} \quad (3.29)$$

3.3.3 Influence de la largeur du contour virtuel

Une série d'identification est réalisée en faisant varier la demi-épaisseur B du contour virtuel en gardant toujours les mêmes paramètres d'initialisation à chaque fois. La demi-épaisseur B du contour virtuel varie de $0,1R^*$ à R^* . La figure 3.16 montre l'évolution de l'erreur de corrélation en fonction de la demi-épaisseur du contour virtuel. La courbe met en évidence l'existence d'une demi-épaisseur optimale B_{opt} pour laquelle l'erreur de corrélation $\log(\Phi_c)$ est minimale. Dans le cas présent $B_{opt} \simeq 0,75R^*$. L'erreur commise sur la corrélation reste cependant faible au voisinage de B_{opt} . La donnée importante est l'influence de la demi-épaisseur B du contour virtuel sur les valeurs identifiées des termes A_1 et A_2 . La valeur identifiée pour chacun

de ces deux termes est précisée sur la figure 3.17 en fonction de l'épaisseur du contour virtuel. On constate que la valeur de B affecte les paramètres identifiés de façon très limitée. Le calcul du coefficient de variation (éq. 3.28) quantifie la variabilité des termes identifiés pour chaque valeur de B simulée :

$$\begin{cases} COV_{A_1} = 1,22\% \\ COV_{A_2} = 2,18\% \end{cases} \quad (3.30)$$

et montre que bien qu'il existe une valeur optimale pour la demi-épaisseur B de l'image virtuelle, l'utilisation d'une autre valeur que cette valeur optimale pour B n'impacte que très faiblement le résultat.

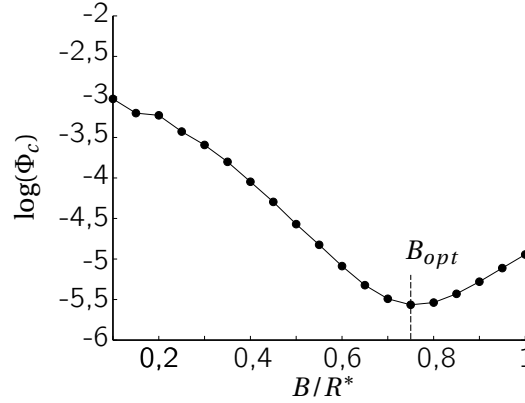


Fig. 3.16 – Influence de la largeur B du contour virtuel sur l'erreur finale de corrélation.

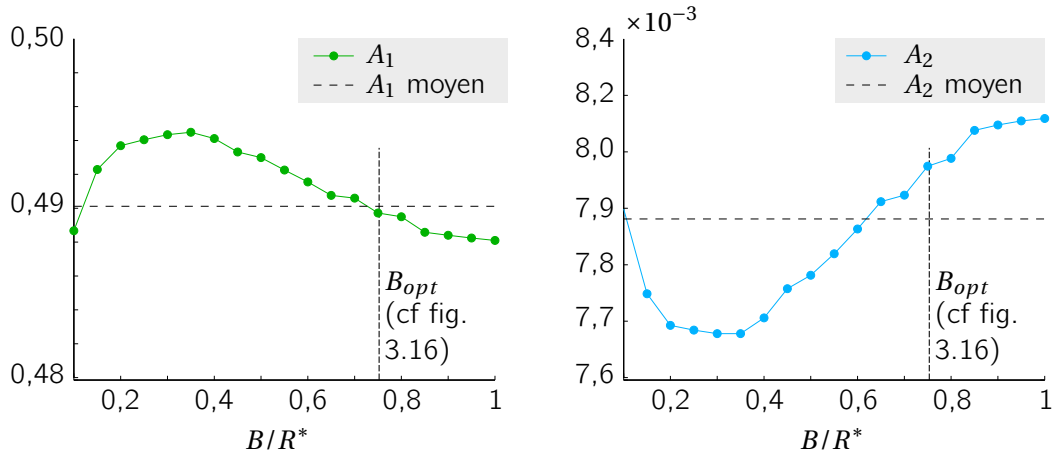


Fig. 3.17 – Influence de la largeur B du contour virtuel sur l'identification des termes A_1 et A_2 .

3.3.4 Influence d'un bruit gaussien sur la solution

Un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type σ_{bruit} compris entre 0 et 100% est appliqué à l'image physique F . Plusieurs niveaux de bruit sont représentés sur la figure 3.18. Ce bruit est défini par la fonction `imnoise` de Matlab. Cette fonction permet d'ajouter un bruit à l'image définie par un niveau de gris F variant entre 0 et 1. Si on appelle F_{bruit} l'image bruitée, on a :

$$F_{bruit} = F + \mathcal{N}(0, \sigma_{bruit}) \quad (3.31)$$

où $\mathcal{N}$ est la loi normale.

Ce bruit traduit d'éventuels défauts du capteur d'un appareil optique ou représente une photo de mauvaise qualité. Les paramètres d'initialisation précédents sont conservés. La figure 3.19 montre la valeur de la

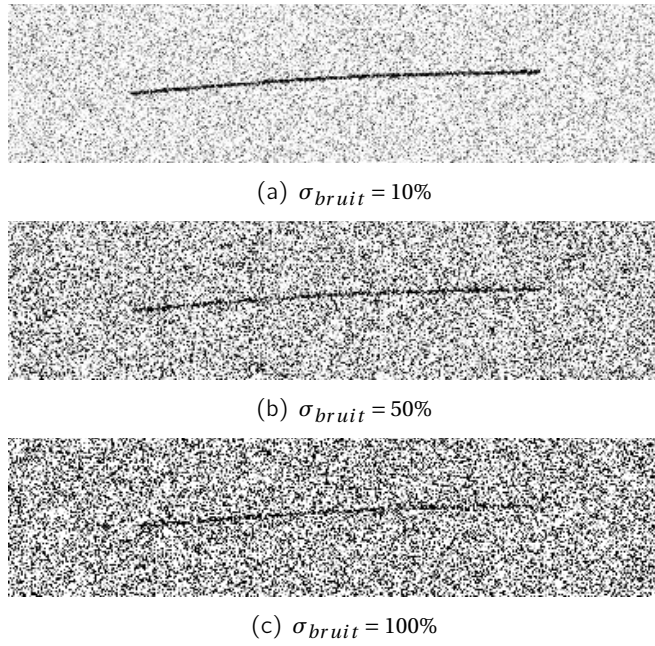


Fig. 3.18 – Détail de l'image physique F de synthèse pour trois niveaux de bruit différents.

fonction de corrélation obtenue en fonction du niveau de bruit. La convergence de la méthode confirme la capacité de la VIC pour la détection du contour quelque soit le bruit. Cependant, la qualité de la corrélation est d'autant réduite que le niveau de bruit est élevé. Un niveau de bruit élevé peut alors mener à des résultats erronés en fin de corrélation. L'erreur sur l'identification des coefficients A_1 et A_2 en fonction du niveau de bruit est quantifiée en calculant un écart relatif $\Delta A_{i=1,2}$ à la valeur identifiée en absence de bruit :

$$\Delta A_{i=1,2} = \frac{A_{i=1,2}^{\sigma_{bruit}} - A_{i=1,2}^{\sigma_{bruit}=0}}{A_{i=1,2}^{\sigma_{bruit}=0}} \quad (3.32)$$

L'évolution de cet écart relatif est tracée en fonction du niveau de bruit sur la figure 3.20. Les résultats montrent que le terme A_2 est très sensible au bruit car l'écart relatif à la solution sans bruit est supérieur à 10% pour $\sigma_{bruit} > 2\%$. Le terme A_1 présente une tolérance au bruit supérieure. L'écart relatif à la solution sans bruit est supérieur à 10% pour un niveau de bruit $\sigma_{bruit} > 8\%$. Ce résultat montre l'importance à accorder à la qualité de l'image étudiée. Une mauvaise définition du contour sur l'image physique peut se traduire par des écarts importants sur les termes identifiés.

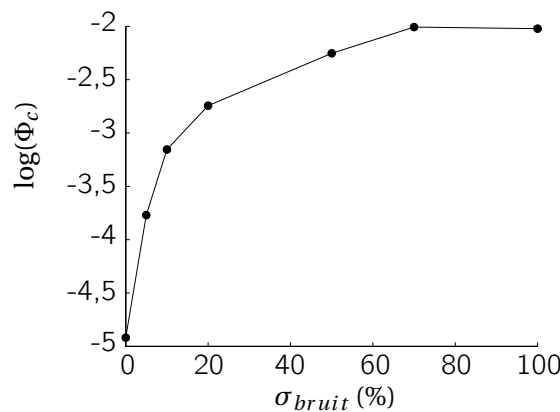


Fig. 3.19 – Influence du bruit sur la valeur de la fonction de corrélation à la fin de la méthode.

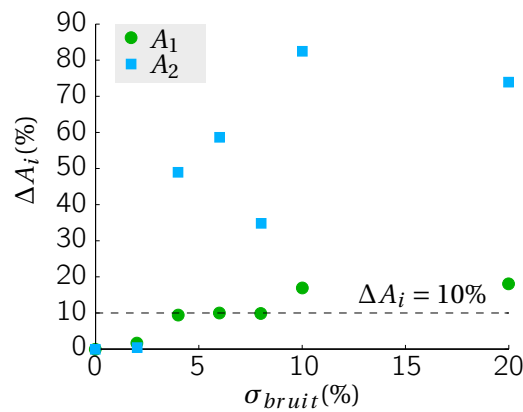


Fig. 3.20 – Influence du bruit sur l'identification des termes A_1 et A_2 .

3.4 Utilisation sur des images expérimentales

L'étude menée sur une image de synthèse montre les capacités de la méthode à identifier les coefficients de la solution analytique pour une poutre gonflable. L'identification de ces coefficients permet de caractériser les propriétés mécaniques sous réserve que le chargement soit connu ou inversement. On propose de réaliser un essai dans le but d'identifier les propriétés mécaniques d'une poutre gonflable console construite en tissu enduit Ferrarri F302. Ce choix est justifié par le fait que cette poutre a fait l'objet d'une étude [Ngu14] qui a permis, par une démarche différente, l'obtention des modules d'élasticité et du module de cisaillement de la poutre. L'étude de [Ngu14] se focalise sur l'étude du gonflage. La mise sous pression de la poutre a pour conséquence une variation géométrique du rayon et de la longueur. Le modèle développé permet de déduire les modules de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson à partir de ces variations géométriques. On propose d'utiliser le même montage expérimental mais de travailler sur la flexion plutôt que sur le gonflage.

3.4.1 Dispositif expérimental

Réalisation d'une poutre console gonflable

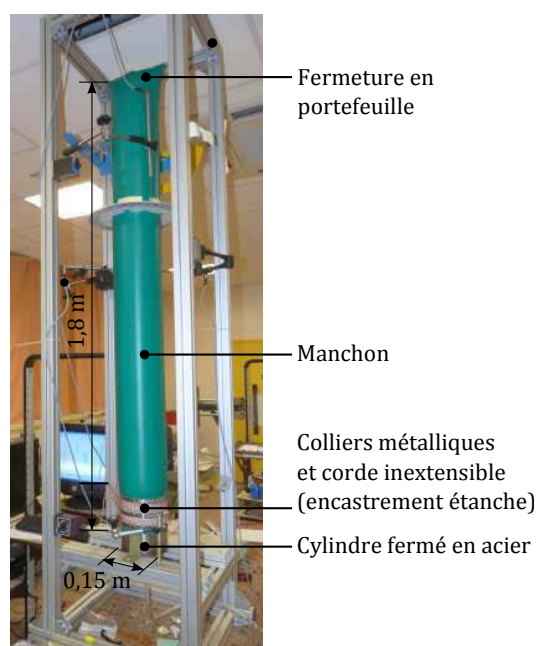


Fig. 3.21 – Réalisation d'une poutre gonflable console [Ngu14].

La poutre est présentée sur la figure 3.21. Elle est réalisée à partir de manchons mesurant 1,8 m de longueur et 0,15 m de diamètre. Les manchons sont fermés longitudinalement par une soudure de largeur 2 cm. On ferme l'une des extrémités en portefeuille (cf chapitre 2). Ce manchon est ensuite installé sur un cylindre fermé en acier de diamètre extérieur égal au diamètre du manchon. Le cylindre en acier est équipé d'une valve permettant la mise sous pression de la poutre. La liaison est assurée par des colliers métalliques. Une corde inextensible est enroulée sur plusieurs tours au niveau de la liaison afin de limiter au maximum les fuites au niveau de l'ancrage [Ngu14]. L'ancrage réalisé peut être modélisé par un encastrement, il est présenté sur la figure 3.22. La section de l'extrémité supérieure de la poutre n'est pas circulaire du fait de la fermeture en portefeuille. On limite donc l'étude à une portion de longueur $L = 1\text{ m}$ à partir de l'encastrement sur laquelle la section est circulaire.



Fig. 3.22 – Visualisation de l'encastrement réalisé.

Appareillage et matériel optique

La figure 3.23 présente une vue générale du montage. La poutre est installée sur une structure porteuse simple réalisée en aluminium profilé. La structure porteuse est fixée sur un marbre. La valve d'alimentation en pression présente sur le cylindre en acier est reliée au système d'air comprimé par l'intermédiaire d'un régulateur de pression ainsi qu'un capteur de pression HBM P8AP (dont la gamme de mesure s'étend de 0 à 1 MPa (classe de précision 0,3) avec une température de service variant de -40°C à 70°C) qui assure le suivi en temps réel de la pression interne par l'utilisation du logiciel HBM Catman. La centrale d'acquisition HBM Spider 8 gère l'interface entre le logiciel et le capteur. La pression p appliquée est de 0,13 bar. La force est appliquée sur la section située à une longueur $L = 1\text{ m}$ à partir de l'encastrement par un dispositif masse-poulie. La liaison entre la poutre et le système masse poulie est assurée par un ruban élastique. La masse m appliquée est de 0,55 kg.

La mesure du déplacement par la VIC nécessite une préparation de la poutre avant le début des mesures. Le dispositif d'ancrage ne doit pas perturber la corrélation, un ruban adhésif est positionné rigoureusement sur la partie supérieure du dispositif de fixation afin de réaliser une frontière nette entre la poutre et l'ancrage lors du traitement d'image. De la même façon, l'extrémité supérieure de la portion étudiée est marquée par le positionnement d'un ruban adhésif autour de la poutre à une longueur $L = 1\text{ m}$ depuis l'encastrement. La ligne neutre de la poutre est tracée à l'aide d'un crayon-craie blanc muni d'une mine de diamètre 15 mm. La qualité du tracé influe directement sur les résultats issus de l'application de la VIC.

Pour obtenir une bonne image, on complète le montage par un système d'éclairage indirect schématisé



Fig. 3.23 – Vue générale du dispositif expérimental.

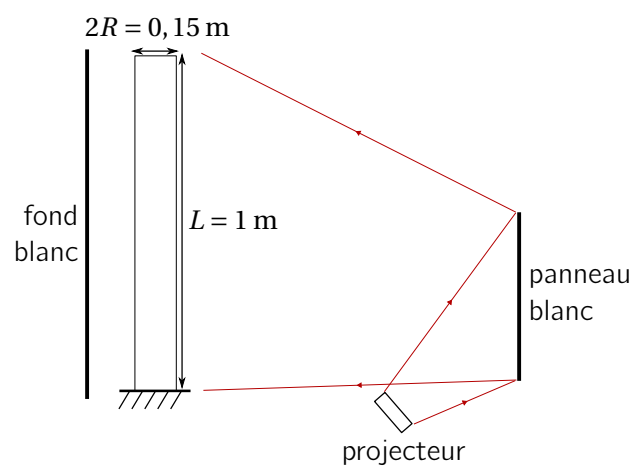


Fig. 3.24 – Éclairage indirect de la poutre console.

sur la figure 3.24. Le tissu constituant la poutre est brillant et présente des reflets. Ces derniers sont limités en fermant les côtés de la structure porteuse avec un drap noir. Un drap blanc est placé en fond pour permettre un éclairage indirect. Un panneau blanc est placé en face de la structure, lequel est éclairé par un projecteur. Les prises de vues sont assurées par une caméra Elphel NC353L, équipée d'un capteur couleur « bayer-pattern » de 2592x1936 pixels de résolution 120lp/mm, placée à une distance $D = 1,5 \text{ m}$ munie d'un objectif Edmund optics 68-670 de focale 5 mm à faible distorsion ($< 0,5$).

Descripteur utilisé pour la mesure par VIC

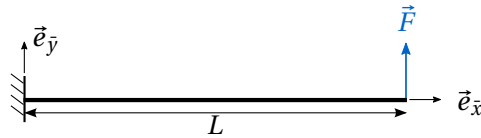


Fig. 3.25 – Poutre console.

La solution analytique pour le problème de poutre gonflable console à prendre en compte lors de la construction du contour virtuel est donnée par les expressions suivantes [Ngu14] :

$$\theta_z(\bar{X}) = \frac{F}{2(E_\ell + P/S)I} (2L\bar{X} - \bar{X}^2) \quad (3.33)$$

$$V(\bar{X}) = \frac{F\bar{X}^2}{6(E_\ell + P/S)I} (3L - \bar{X}) + \frac{F\bar{X}}{(P + kG_{\ell t}S)} \quad (3.34)$$

Cette équation s'écrit en fonction des nombres adimensionnés A_1 et A_2 (cf équation (3.9)) :

$$\theta_z(\bar{X}) = \frac{A_1}{2} \left(2\frac{\bar{X}}{L} - \left(\frac{\bar{X}}{L} \right)^2 \right) \quad (3.35)$$

$$\frac{V(\bar{X})}{L} = \frac{A_1}{6} \left(\frac{\bar{X}}{L} \right)^2 \left(3 - \frac{\bar{X}}{L} \right) + A_2 \frac{\bar{X}}{L} \quad (3.36)$$

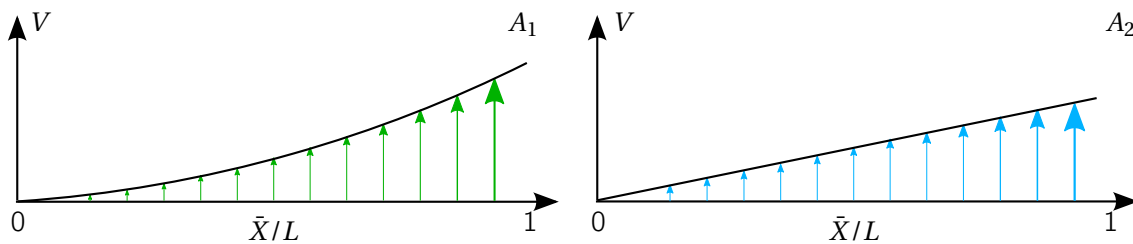


Fig. 3.26 – Influence des termes A_1 (gauche) et A_2 (droite) sur la déformée d'une poutre console.

La démarche présentée pour la poutre biappuyée reste valable en considérant les équations (3.33) et (3.34) à la place des équations (3.7) et (3.8). L'influence des termes A_1 et A_2 est représentée sur la figure 3.26. Il apparaît que l'influence de A_2 est similaire à une rotation de corps rigide. Il n'est donc pas possible d'identifier en même temps le terme A_2 et la rotation de solide rigide.

On propose la procédure suivante : après s'être assuré de la rectitude de la poutre à l'état initial, la rotation de solide rigide est mesurée sur ce dernier. Cette variable est ensuite imposée lors des identifications suivantes. Les paramètres de contrôle λ_k sont donc différents à l'état initial et aux mesures suivantes. Ces différences sont résumées sur la figure 3.27. Sur l'état initial, la déformée est supposée nulle ($A_1 = A_2 = 0$), les paramètres de contrôle λ_k sont alors :

- le mouvement de corps rigide ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$);
- la géométrie L^* et R^* de la ligne neutre (λ_4, λ_5).

L'identification sur l'état déformé est basée sur les paramètres de contrôle suivant :

- la translation de corps rigide (λ_1, λ_2);
- la longueur L^* et le rayon R^* de la ligne neutre (λ_3, λ_4);
- la déformation du contour ($A_1 = \lambda_5, A_2 = \lambda_6$);

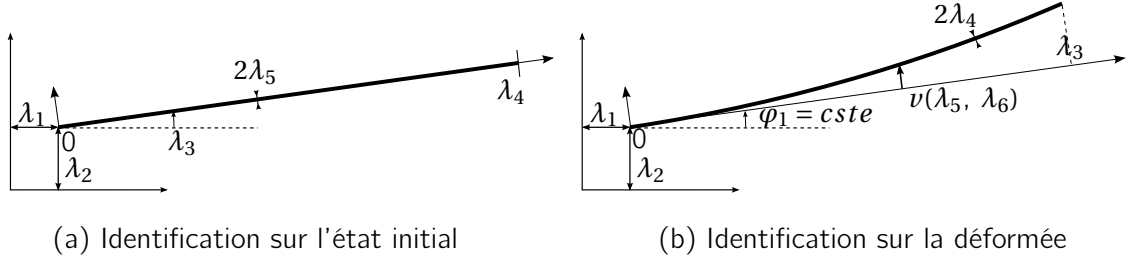


Fig. 3.27 – Influence des paramètres de contrôle sur l'identification par VIC sur l'état initial (a) et sur la déformée (b).

L'initialisation est effectuée de la manière suivante : pour l'état initial, les paramètres de contrôle sont initialisés par une saisie utilisateur qui permet l'identification du repère propre. Soient $A(X_A, Y_A)$ et $B(X_B, Y_B)$ les extrémités de la poutre :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= X_A \\
 \lambda_2 &= Y_A \\
 \lambda_3 &= \text{atan}\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) \\
 \lambda_4 &= \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Le rapport entre L et R sur l'image physique est connu, ce qui permet l'initialisation de λ_5 :

$$\lambda_5 = \frac{R}{L} \lambda_4 \tag{3.38}$$

Les résultats obtenus sont ensuite utilisés comme valeur initiale sur les identifications suivantes. La déformée étant faible, les termes A_1 et A_2 sont initialisés à zéro.

3.4.2 Protocole expérimental

Une première mesure est effectuée sur la poutre console afin de mettre en place le montage et de régler le processus de mesure (mise au point de la caméra, éclairage). Une fois cette mesure terminée le protocole suivant est établi :

- **Mise en forme de la poutre** : le tube est mis sous pression à 0,13 bar pendant 36 heures afin que les fibres se replacent après plusieurs mois de stockage et pour que la poutre se stabilise.
- **Mesure de l'état initial** : lors du montage la rectitude de la poutre est vérifiée, cependant l'état initial est mesuré pour affiner les résultats futurs.
- **Application du chargement et mesure de la déformée** : Pour prendre en compte les effets visco-élastiques dans le tissu une mesure de la déformée est réalisée toutes les 10 minutes sur une période de 70 minutes. La pression de gonflage est vérifiée régulièrement tout au long de la manipulation.

3.4.3 Résultats

Les figures 3.28 à 3.35 présentent les résultats de la corrélation à chaque temps d'étude. La demi-épaisseur B du contour virtuel est de $0,75R^*$ (où R^* représente la demi-épaisseur de la ligne neutre exprimée en pixels, R^* est de l'ordre de 2 pixels sur les photos) dans tous les cas. La visualisation des images physiques dans le repère des contours virtuels associés révèle une très bonne corrélation puisque, malgré quelques irrégularités, la partie supérieure tend vers le noir tandis que la partie inférieure tend vers le blanc. Ce résultat est d'autant plus précis que la demi-épaisseur B est faible.

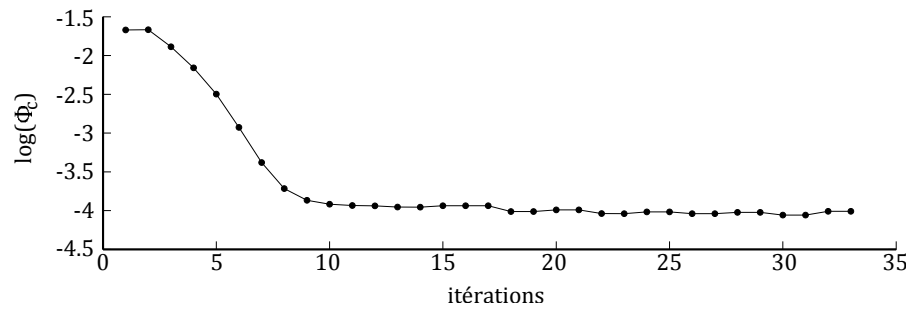
L'identification des termes A_1 et A_2 par la VIC permet de déduire les modules d'élasticité E_ℓ et $G_{\ell t}$ du tissu, la géométrie et le chargement étant connus. Les valeurs identifiées pour chacun des pas de temps de mesure sont indiquées sur la figure 3.36. Les résultats mettent en évidence le comportement visco-élastique de la structure. Les modules identifiés lors des premières mesures étant plus élevés, et plus particulièrement la sensibilité du module de cisaillement au fluage. Alors que le module de Young varie faiblement, le module de cisaillement décroît plus sensiblement. Ce résultat n'est pas surprenant. En effet, le module de Young E_ℓ sollicite directement les fibres qui ne sont pas visqueuses tandis que le module de cisaillement $G_{\ell t}$ sollicite la matrice qui est visqueuse.

Les ordres de grandeur de E_ℓ et $G_{\ell t}$ sont cohérents avec les données expérimentales Nguyen [Ngu14] exprimées par leur produit avec l'épaisseur H du tissu qui constituent un élément de comparaison.

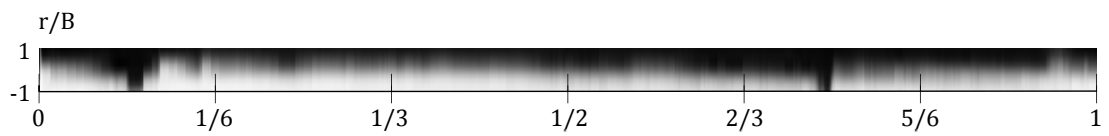
$$\begin{cases} E_\ell H = 2.2 \times 10^5 \text{ N/m} \\ G_{\ell t} H = 5.2 \times 10^3 \text{ N/m} \end{cases} \quad (3.39)$$

Un écart d'environ 15% est observé sur le module d'Young. L'écart sur le module de cisaillement est plus important (de l'ordre de 23% pour la mesure à $t = 70$ minutes). Ces écarts sont admissibles dans la mesure où les résultats sont obtenus par deux méthodes différentes et que le module de Young est prépondérant sur le module de cisaillement dans le cas d'un tissu orthotrope. L'identification du module de cisaillement est difficile.

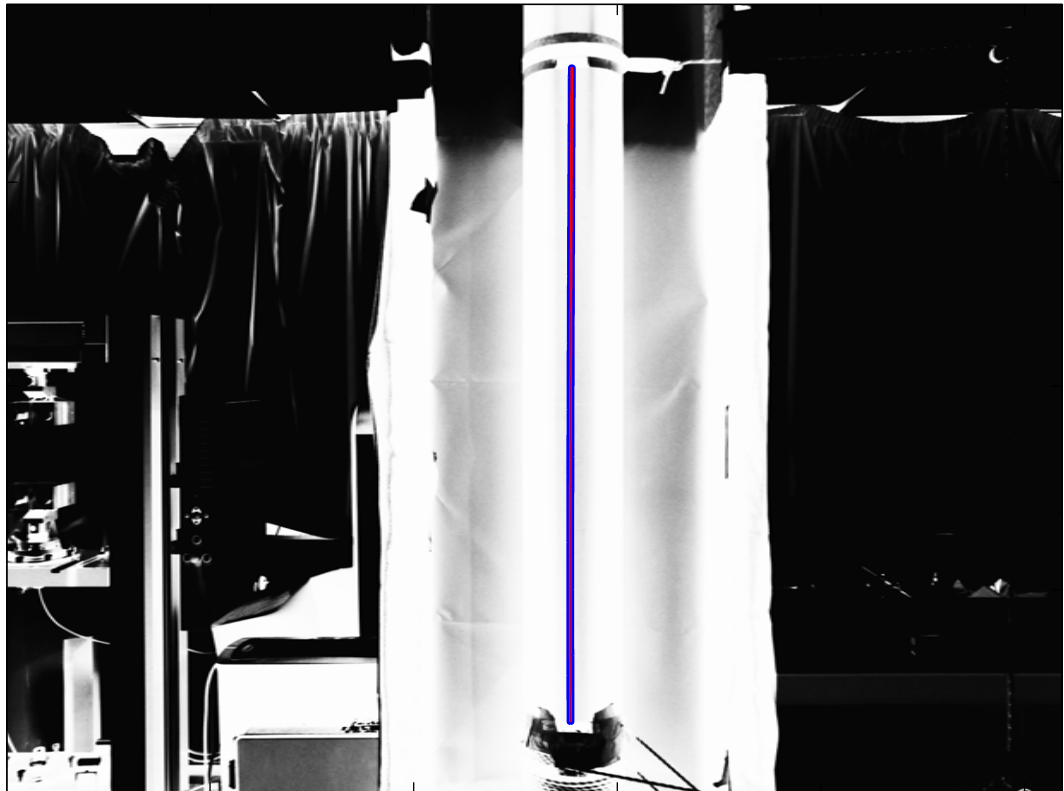
Il faut cependant noter que c'est en réalité le déplacement qui est mesuré et que ce dernier dépend d'une combinaison des modules E_ℓ et $G_{\ell t}$. On propose donc de comparer les déplacements mesurés au déplacement calculé à partir de l'équation (3.34) en utilisant les données expérimentales du système (3.39). Les résultats sont présentés sur la figure 3.37. Ils mettent à nouveau en évidence le comportement visco-élastique de la structure puisque la flèche mesurée n'est pas la même dans tous les cas. Une augmentation de la flèche est observée au cours du temps, le phénomène se stabilise à partir de la mesure réalisée à 20 minutes, l'écart entre les dernières courbes étant très faible. Ces courbes sont très proches de la courbe de référence, en traits interrompus sur la figure 3.37, construite avec les valeurs de [Ngu14]. L'utilisation de la VIC pour la mesure du déplacement d'une poutre gonflable est donc validée.



(a) Convergence



(b) Représentation de l'image physique dans le repère du contour virtuel



(c) Position du contour virtuel sur l'image physique

Fig. 3.28 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 0$ minutes.

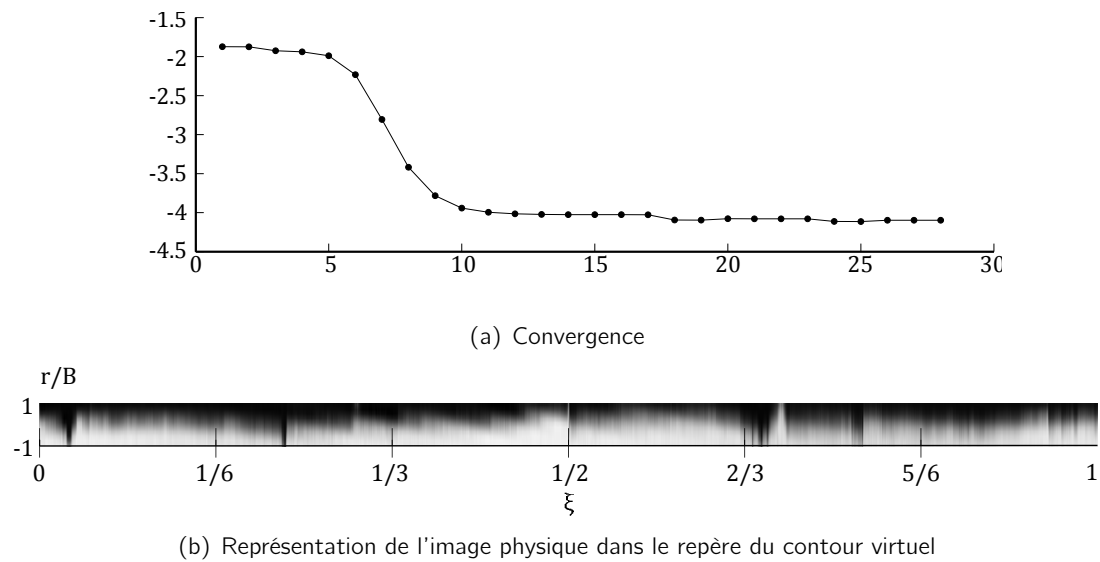


Fig. 3.29 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 10$ minutes.

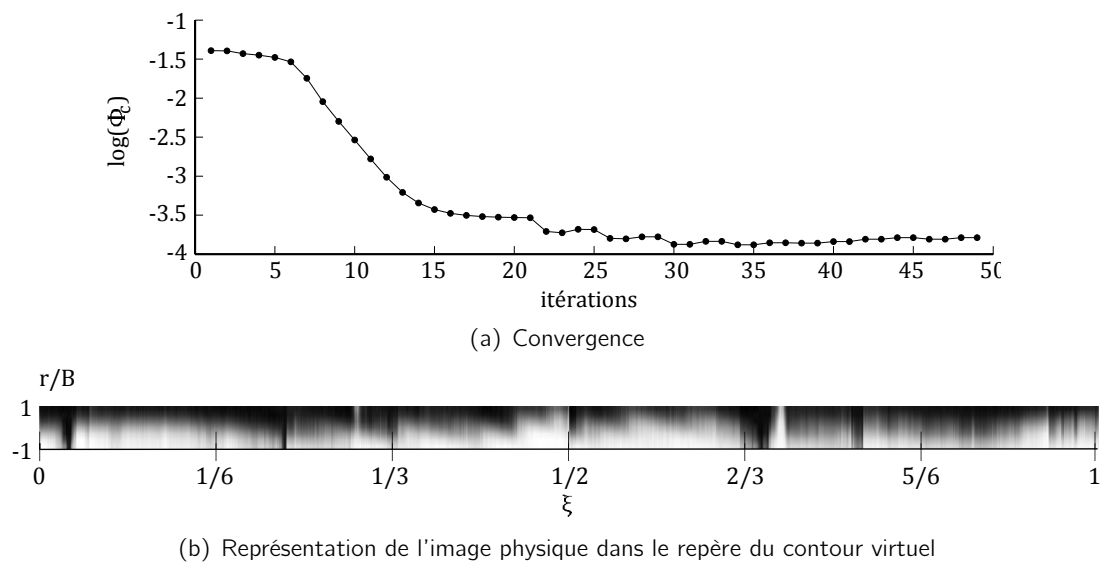


Fig. 3.30 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 20$ minutes.

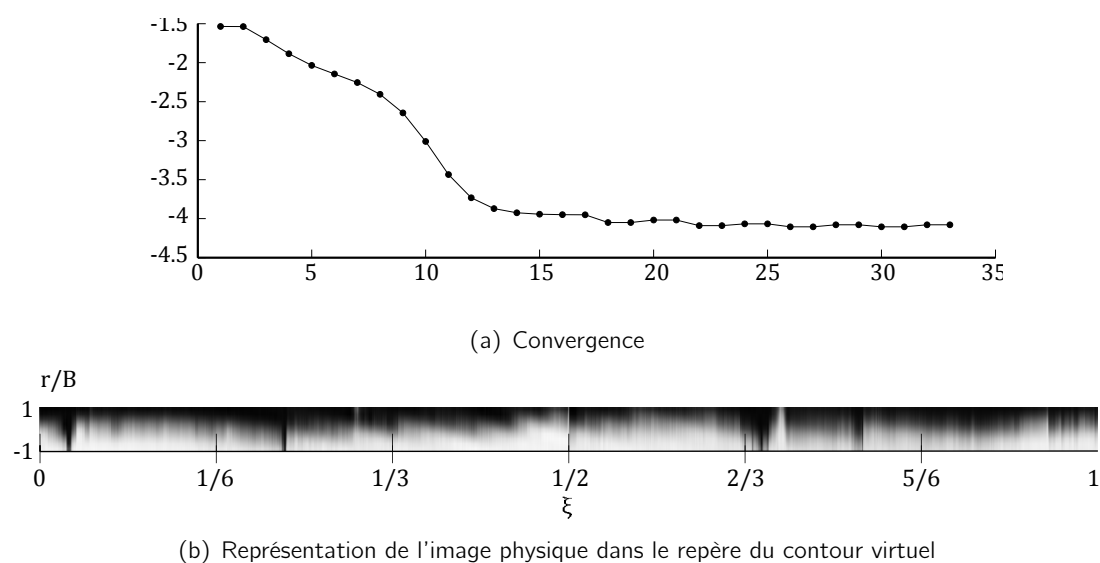


Fig. 3.31 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 30$ minutes.

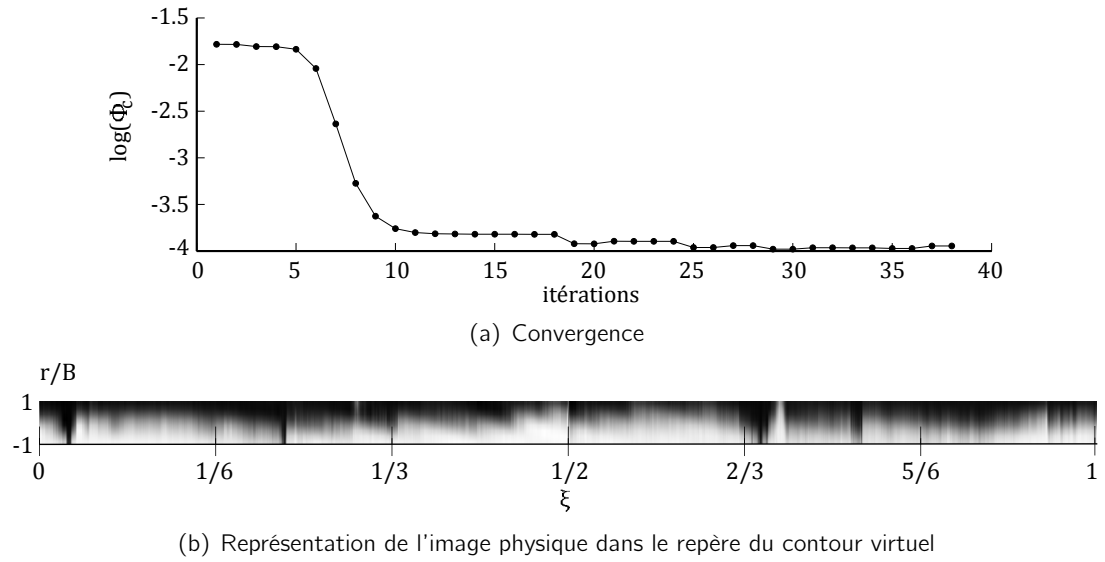


Fig. 3.32 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 40$ minutes.

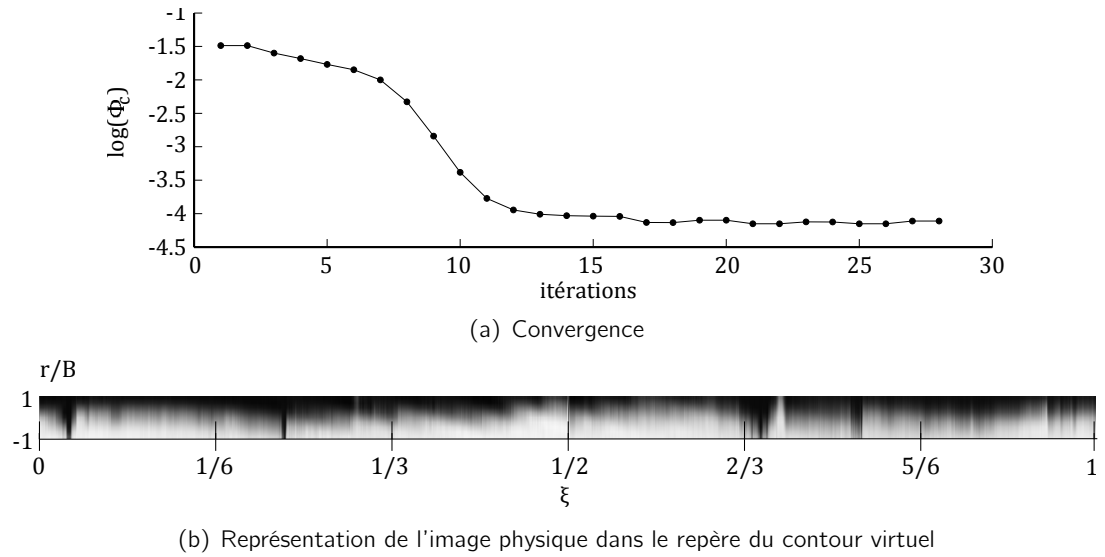


Fig. 3.33 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 50$ minutes.

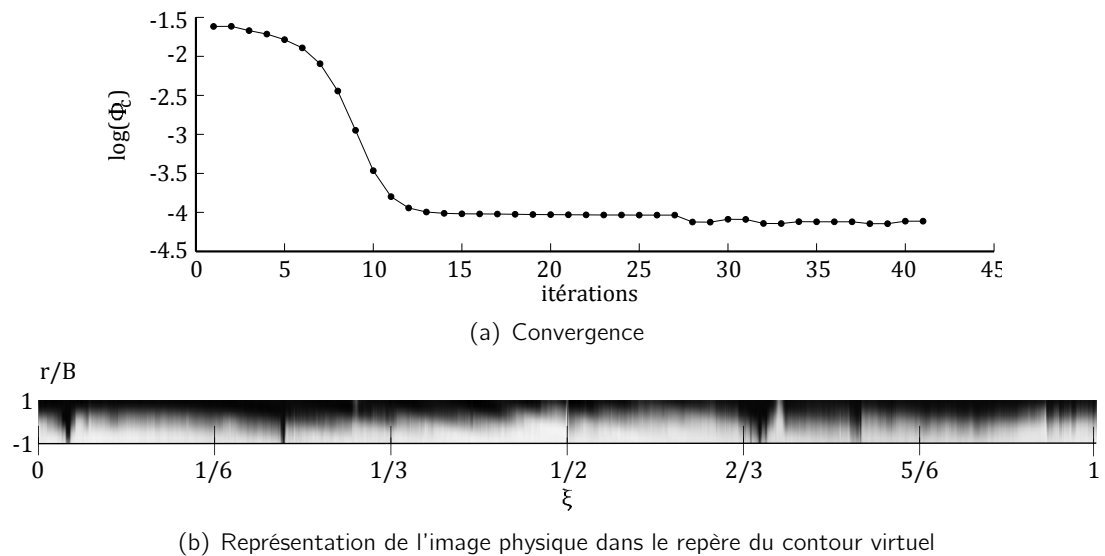


Fig. 3.34 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 60$ minutes.

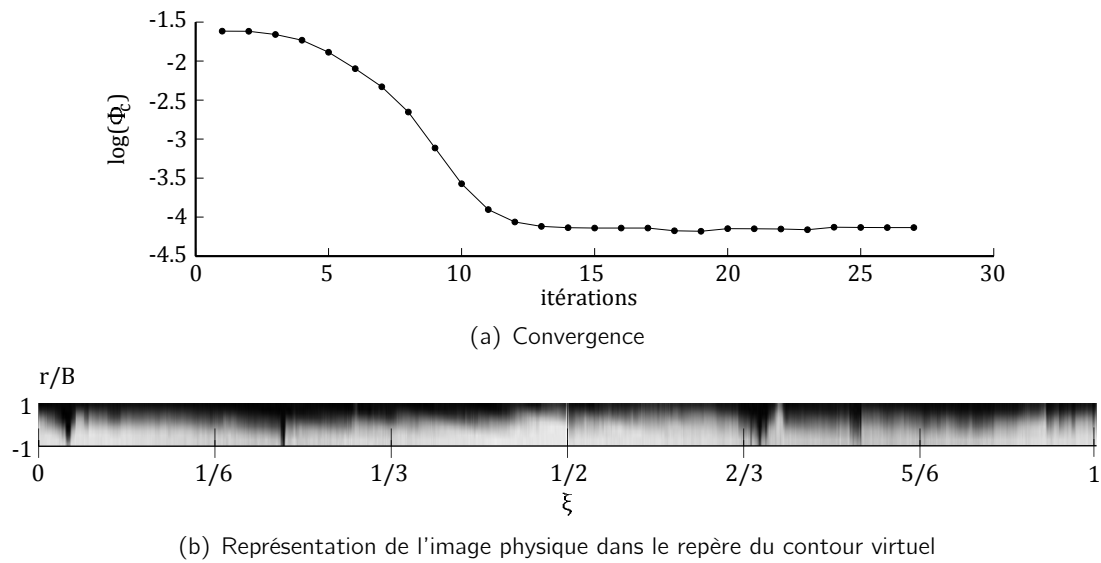


Fig. 3.35 – Résultat du traitement par VIC sur la mesure à $t = 70$ minutes.

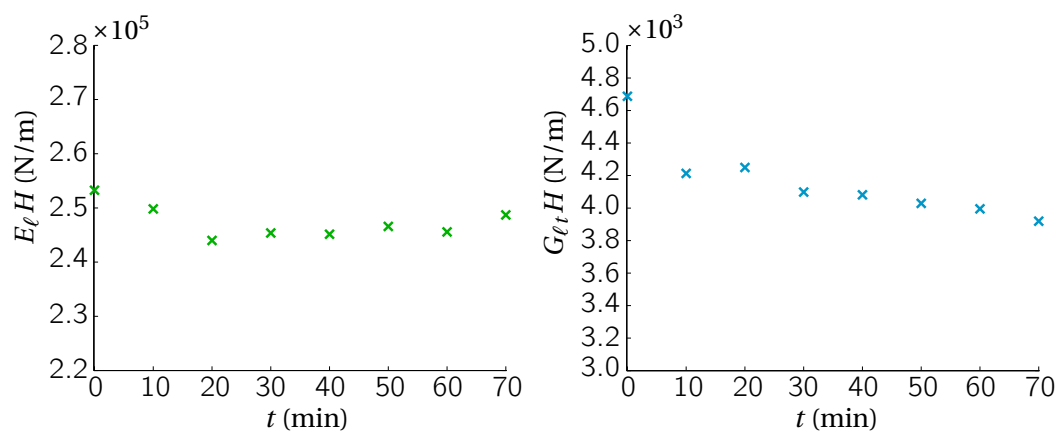


Fig. 3.36 – Identification des coefficients matériaux à chaque mesure, mise en évidence des effets du fluage sur une poutre gonflable.

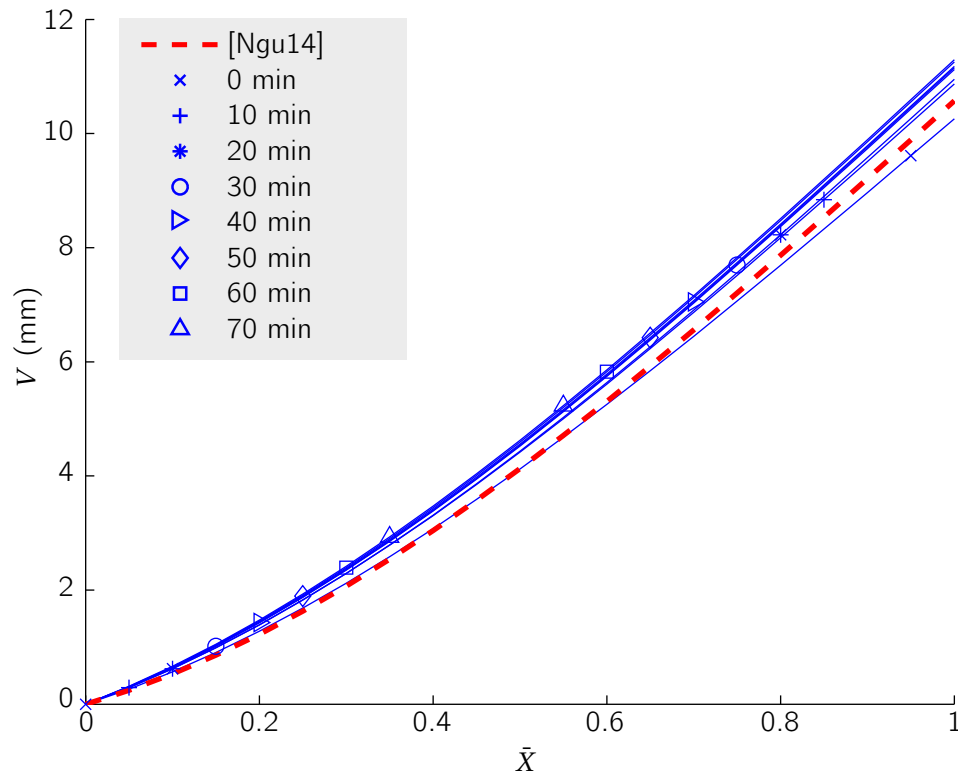


Fig. 3.37 – Évolution de la flèche mesurée au cours du temps.

3.5 Développement de capteurs de pression

La modélisation sous chargement climatique nécessite la connaissance du champ de pression exercé sur la structure notamment par le vent. La constitution des structures ne permet de mettre en œuvre les techniques habituellement utilisées pour l'identification du champ de pression. Plusieurs options existent pour réaliser cette identification :

- **Mesure directe** : développement de capteurs adaptés permettant la mesure du champ de pression directement sur la structure testée.
- **Mesure inverse** : Mesure de la déformée et fabrication d'un modèle rigide sur lequel l'identification de champ de pression est effectuée.

La mesure indirecte est envisageable mais avec l'inconvénient de partager la mesure en deux temps qui peuvent être éloignés en raison des délais de fabrication des modèles rigides. Par ailleurs la déformée d'une structure gonflable peut être complexe, ce qui complique davantage la fabrication des modèles rigides. La mesure directe est préférée.

3.5.1 Recherche de forme

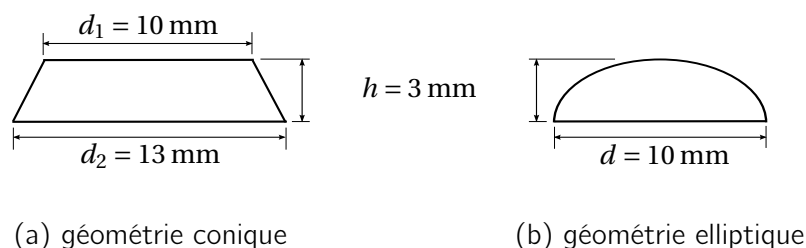


Fig. 3.38 – Géométries des amortisseurs utilisés comme base de fabrication des capteurs.

L'application de capteurs sur la surface de la structure provoque des irrégularités de la surface et donc de la rugosité. Les capteurs doivent être les plus petits possible et avoir une géométrie aérodynamique pour ne pas perturber le flux d'air. La forme la plus adaptée est lenticulaire car cette forme ne provoque pas de détachement de la couche limite comme schématisé sur la figure 3.39. On choisit de privilégier une solution issue de produits commerciaux pour simplifier la fabrication. Des amortisseurs en silicone sont sélectionnés en raison de leur petite taille et de la possibilité d'usinage. Deux géométries, détaillées sur la figure 3.38, sont disponibles : un amortisseur au profil demi-elliptique dont les grand et petit axes valent respectivement $d = 10 \text{ mm}$ et $h = 3 \text{ mm}$, le second amortisseur est une section de cône d'épaisseur $h = 3 \text{ mm}$ et dont les surfaces supérieure et inférieure présentent un diamètre égal à $d_1 = 10 \text{ mm}$ et $d_2 = 17 \text{ mm}$ respectivement. Plus les dimensions sont réduites, plus le phénomène décrit sur la figure 3.39 est atténué.

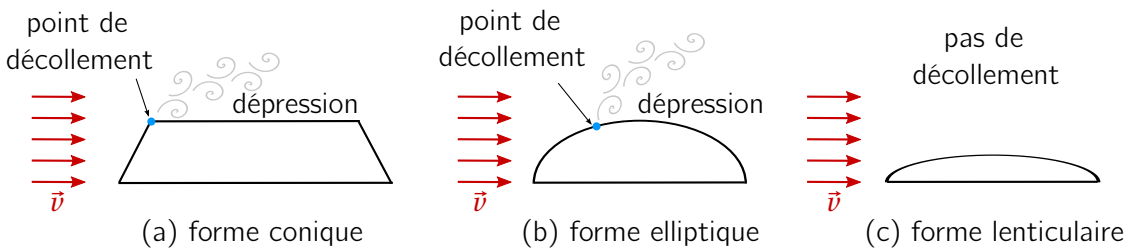


Fig. 3.39 – Décollement de la couche limite sur différentes formes de capteurs.

3.5.2 Fabrication

Contraintes géométriques

La pression est mesurée à l'aide de la centrale PSI du CSTB. Les capteurs sont reliés à la centrale d'acquisition par des tubes en Vinyl de diamètre intérieur égal à $1,6 \text{ mm}$. Les capteurs doivent se connecter à ces tubes pour réaliser les mesures. La liaison est assurée par des tubes rigides en polypropylène de diamètre extérieur $d_e = 1,6 \text{ mm}$ et de diamètre intérieur $d_i = 0,8 \text{ mm}$.

Procédé de fabrication

La fabrication se décompose en quatre étapes successives décrites sur la figure 3.40 :

- **Perçage horizontal** de l'amortisseur à mi-hauteur puis introduction du tube de polypropylène. L'usinage est effectué avec une perceuse à colonne et un foret de diamètre $1,6 \text{ mm}$. L'épaisseur de l'amortisseur étant très faible, il faut s'assurer du bon maintien de ce dernier. L'opération est effectuée sous loupe éclairante.
- **Perçage vertical** de l'amortisseur et de la paroi supérieure du tube en polypropylène. Cette opération est délicate, il ne faut pas traverser l'intégralité du capteur sous peine de voir apparaître des fuites. La vitesse de perçage est minimale pour que le foret ne glisse pas contre la paroi du tube de polypropylène au niveau du changement de milieu.
- **Évacuation des copeaux** avec une aiguille fine.
- **Collage du tube de polypropylène** par application d'une goutte de cyanolite au niveau du premier perçage sous loupe éclairante. Cette étape assure l'étanchéité du capteur. Des précautions sont prises pour ne pas obstruer le tube.

Les capteurs fabriqués sont présentés sur la figure 3.41.

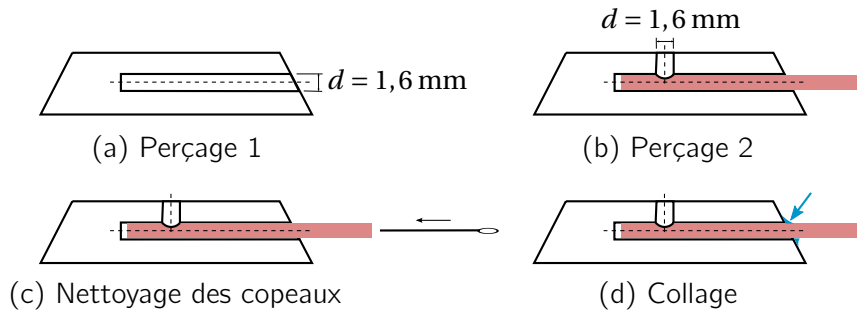


Fig. 3.40 – Procédé de fabrication des capteurs de pression.

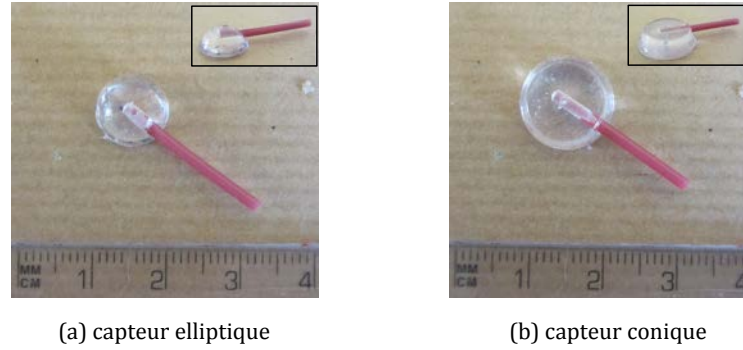


Fig. 3.41 – Capteurs fabriqués.

3.5.3 Test des capteurs en soufflerie

Dispositif expérimental

Un essai est réalisé sur une maquette rigide afin de comparer les résultats de la mesure à l'aide des capteurs fabriqués et ceux obtenus par des perçages classiques, utilisés usuellement sur des structures rigides. La maquette rigide d'une tour elliptique, visible sur la figure 3.42(a), est disponible au CSTB. Le profil de cette maquette permet de tester les capteurs pour plusieurs angles d'incidence du vent. Le grand axe de la maquette mesure 325 mm et le petit axe 215 mm, la hauteur est de 605 mm. La pression de référence est mesurée à l'aide de tubes en cuivre de diamètre extérieur $d_e = 1,6 \text{ mm}$ et de diamètre intérieur $d_i = 0,8 \text{ mm}$. Ces tubes sont orientés selon la normale à la surface de la maquette et l'extrémité est coupée afin que le tuyau soit affleurant à la surface. Les deux types de capteurs fabriqués sont positionnés sur deux lignes au dessus et en dessous d'une ligne de tubes affleurants à différents angles d'incidence α_i comme représenté sur les figures 3.42(b) et 3.43. La maquette est ensuite positionnée dans la veine d'essai haute vitesse sur une table de hauteur égale à 1,20 m pour s'affranchir de l'influence de la couche limite, cette installation est schématisée sur la figure 3.44. L'expérience est effectuée pour un vent turbulent de vitesse $v = 24,5 \text{ m/s}$ à trois reprises. L'exemple choisi est volontairement pénalisant d'une part par la turbulence de l'écoulement ($Re = 3,9.10^5$) et d'autre part par la taille non négligeable des capteurs devant les dimensions de la maquette.

Les angles d'incidences du vent α_i sont déterminés à partir des positions des capteurs à partir de l'équation de l'ellipse de grand axe a et de petit axe b . Soit $M(r(\phi), \phi)$ un point de l'ellipse définie par :

$$r(\phi) = \sqrt{\frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \phi}} \quad (3.40)$$

où $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ est l'excentricité. On appelle $\vec{x} = r(\phi)\vec{e}_r$ la position du point M dans la base cylindrique.

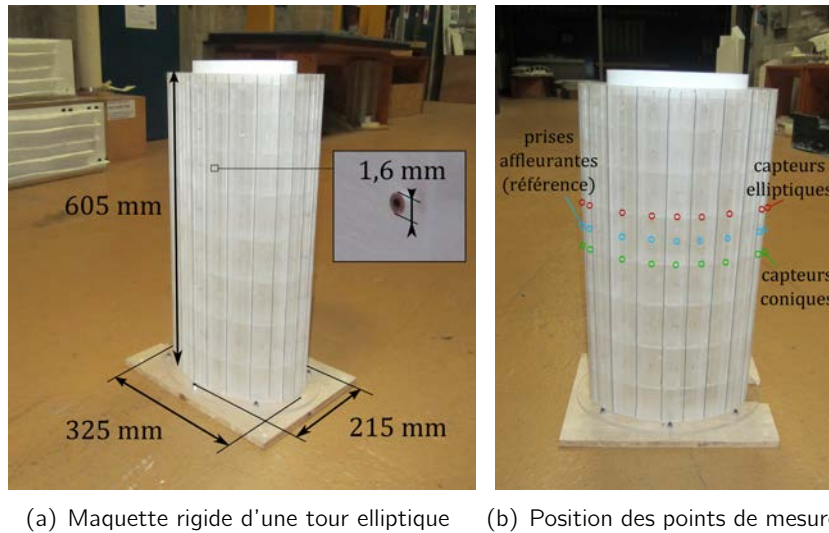


Fig. 3.42 – Maquette rigide équipée de prises de pression affleurantes utilisée pour le test des capteurs en soufflerie et position des points de mesure.

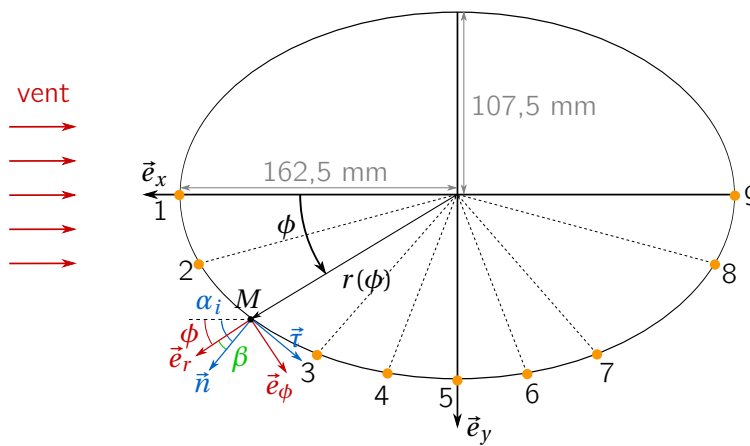


Fig. 3.43 – Position des capteurs sur la maquette rigide.

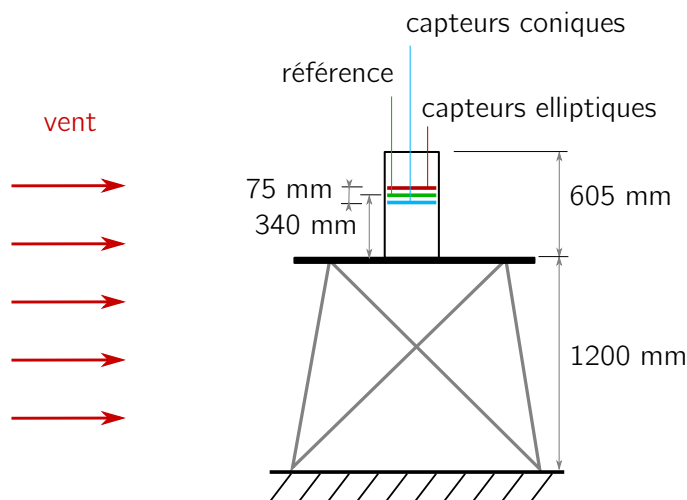


Fig. 3.44 – Vue schématique du montage permettant de tester les capteurs de pression.

Le vecteur tangent $\vec{t}$ dans la base cylindrique est alors :

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{d\vec{x}}{d\phi} \\ &= \frac{d}{d\phi}(r\vec{e}_r) \\ &= \frac{dr}{d\phi}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\phi} \\ &= \frac{dr}{d\phi}\vec{e}_r + r\vec{e}_\phi\end{aligned}\quad (3.41)$$

l'expression du vecteur normal dans la base cylindrique est ensuite calculée par :

$$\vec{n} = r\vec{e}_r - \frac{dr}{d\phi}\vec{e}_\phi \quad (3.42)$$

le vecteur normal unitaire $\vec{e}_n$ est :

$$\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}} \left(r\vec{e}_r - \frac{dr}{d\phi}\vec{e}_\phi \right) \quad (3.43)$$

Finalement, l'angle d'incidence α_i du vent sur le capteur est :

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \phi + \beta \\ &= \phi + \arccos(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_r) \\ &= \phi + \arccos\left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}}\right)\end{aligned}\quad (3.44)$$

en prenant en compte les valeurs de $r(\phi)$ donnée par l'équation (3.40) et de la dérivée

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{e^2 b \sin(2\phi)}{2(1 - e^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (3.45)$$

on obtient :

$$\alpha_i = \phi + \arccos\left(\frac{\sqrt{\frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \phi}}}{\sqrt{\frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \phi} + \frac{e^4 b^4 \sin^2(2\phi)}{4(1 - e^2 \cos^2 \phi)^3}}}\right) \quad (3.46)$$

La relation entre α_i et ϕ est tracée sur la figure 3.45

Résultats

Les pressions mesurées par les 3 méthodes (capteurs coniques, elliptiques et tubes affleurants) sont comparées sur la figure 3.46. Les courbes obtenues pour les deux types de capteurs fabriqués présentent une allure similaire à la courbe de référence construite à partir des mesures des tubes affleurants. On observe une première partie pour laquelle la maquette subit une pression (de $\phi/\pi = 0$ à $\phi/\pi = 0,15$) puis une seconde partie pour laquelle la maquette subit une dépression (pour $\phi/\pi > 0,15$). L'amplitude est cependant différente. Les capteurs fabriqués présentent une dépression plus importante que les tubes affleurants, ce résultat s'explique par un décollement de couche limite sur les capteurs (cf fig. 3.39) qui crée une dépression supplémentaire. Cette dépression est plus importante sur les capteurs elliptiques. On remarque cependant que cette dépression supplémentaire n'est pas constante. En comparant la courbe des capteurs coniques et la courbe de référence, la différence au delà de $\phi/\pi = 0,5$ est quasi-nulle. Le comportement de la couche limite est donc différent selon l'angle d'incidence du vent. On introduit l'erreur relative Δp entre la pression

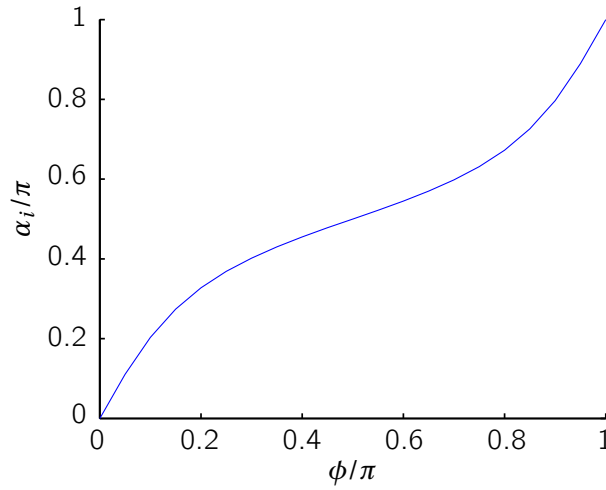


Fig. 3.45 – Évolution de l’angle d’incidence du vent α_i en fonction de la position ϕ sur la maquette.

de référence donnée par les prises affleurantes et les capteurs fabriqués par la définition suivante :

$$\Delta p = \frac{p_{\text{capteur}} - p_{\text{affleurante}}}{p_{\text{affleurante}}} \tag{3.47}$$

L’évolution de l’erreur relative Δp en fonction de l’angle d’incidence du vent α_i est tracée sur la figure 3.47. L’analyse de ces courbes permet de conclure sur les orientations les plus et les moins favorables à l’utilisation du capteur. L’erreur relative sur la pression mesurée par les capteurs coniques par rapport aux prises affleurantes est maximale pour un angle d’incidence $\alpha_i/\pi = 0,4$. On soulignera cependant que la mesure effectuée en $\alpha_i/\pi = 0,3$ présente une grande variabilité bien que l’erreur relative sur la moyenne soit faible. Ce point de mesure est situé en $\phi/\pi = 0,1$ sur la figure 3.46 sur laquelle on observe une transition pression-dépression $\phi/\pi = 0,15$. Le point situé en $\phi/\pi = 0,1$ (*i.e.* $\alpha_i/\pi = 0,3$) est selon les mesures situé dans la partie sous pression ou sous dépression. L’étude expérimentale des capteurs permet d’éliminer la géométrie elliptique dont les résultats sont trop éloignés du résultat de référence bien que l’allure soit la bonne. Les résultats obtenus sur les capteurs coniques valident leur utilisation future en considérant les remarques suivantes :

- l’allure obtenue est cohérente ;
- la mesure à proximité du point de décollement de la couche limite présente une grande variabilité ;
- les valeurs mesurées au voisinage de $\alpha_i/\pi = 0,4$ sont les moins précises.
- le cas étudié est très défavorable : sur des structures présentant un rapport de taille plus important avec les capteurs, ces derniers se situeront hors de la couche limite

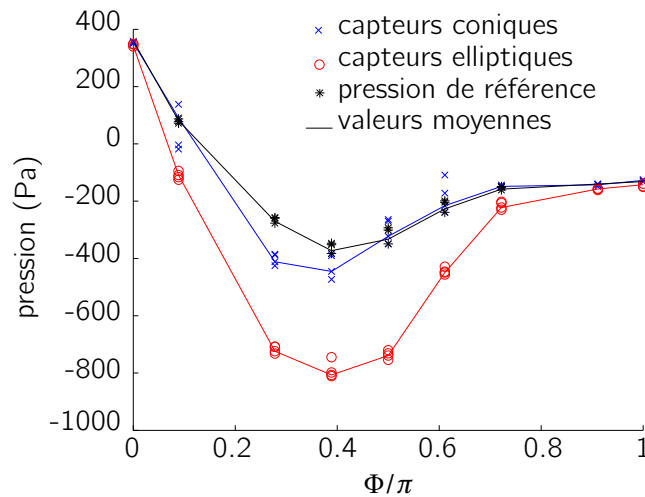


Fig. 3.46 – Profil de pression mesuré sur la maquette rigide par les différents types de capteurs sur 3 mesures et valeur moyenne pour une vitesse de vent de 24 m/s.

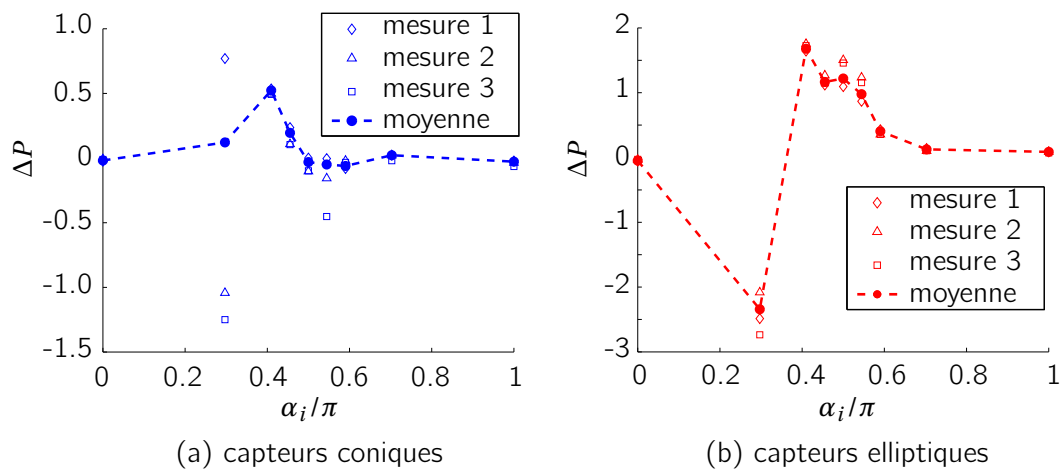


Fig. 3.47 – Erreur relative entre les pressions mesurées par les tubes affleurants et les capteurs coniques (a) et elliptiques (b) selon l'angle d'incidence du vent pour les 3 mesures réalisées à 24 m/s.

3.6 Conclusion

Les études menées dans ce chapitre permettent de répondre à la problématique proposée en introduction. La VIC permet de disposer d'un outil de mesure de champ performant, compatible avec les grands déplacements et applicable en soufflerie. L'implémentation des modèles de poutres gonflables comme descripteur dans la routine de corrélation permet de valider les modèles par comparaison expérimentale. La force de la méthode est qu'en plus de l'identification du déplacement, elle permet le post-traitement de la rigidité si le chargement est connu ou inversement. Les deux grandeurs étant a priori inconnues, une seconde solution est proposée pour la caractérisation du chargement extérieur. Des capteurs de pression sont développés et testés sur la maquette rigide d'une tour. La comparaison des résultats avec une méthode classique de mesure de pression permet de choisir la géométrie la plus adéquate pour le capteur. En conclusion, ce chapitre permet de disposer de tous les outils nécessaires à la réalisation d'essais en soufflerie afin de mener à bien l'étude comportementale et la recherche de similitudes proposées par la problématique de la thèse.

Chapitre 4

Étude expérimentale, modèles réduits et similitudes

Résumé : Dans le génie civil et la construction, la reproduction d'un chargement vent sur une structure rigide à échelle réduite dans une soufflerie à couche limite atmosphérique est courante dans la phase de dimensionnement. La reproduction de tels chargements sur une structure hautement déformable, comme un bâtiment gonflable, est complexe dans la mesure où l'on ne dispose d'aucune référence concernant la répartition de la pression due au vent sur les formes complexes des déformées associées aux structures étudiées. Par ailleurs, l'utilisation dans une soufflerie à couche limite atmosphérique est performante pour reproduire des vents à une échelle de l'ordre de $1/300$. L'utilisation d'un tel outil nécessite alors la réalisation de modèles réduits à une échelle équivalente. La reproduction à une telle échelle d'un bâtiment gonflable est une problématique nouvelle qui paraît difficilement envisageable notamment à cause du poids et de la rigidité de la structure. La résolution de cette problématique à long terme passe par une réflexion sur les effets d'échelle sur des structures gonflables. On propose donc dans ce chapitre une première réflexion sur la réduction de modèle pour des structures gonflables simples. La méthode repose sur une approche analytique qui consiste à adimensionner les équations de la déformée quand elles existent ou à appliquer la théorie de Vashy-Buckingham si les équations de la déformée ne sont pas disponibles. Le travail repose ensuite sur des essais en soufflerie sur des modèles réduits à des échelles de l'ordre de $1/10$ au maximum. Les essais sont exploités à partir des modèles développés au chapitre 2 et des méthodes de mesure évoquées au chapitre 3.

4.1 Introduction : les essais en soufflerie	131
4.1.1 Les souffleries	131
4.1.2 Un outil de dimensionnement dans le Génie Civil et la Construction	131
4.1.3 La nécessité des essais en soufflerie pour les structures gonflables	132
4.1.4 Les verrous scientifiques à lever	133
4.2 Étude de la traînée d'une poutre gonflable en soufflerie	134
4.2.1 Montage expérimental	134
4.2.2 Étude analytique de poutre	136
4.2.3 Protocole expérimental	136
4.2.4 Résultats	137
Remarques générales	137
Analyse visuelle des images	138
Paramétrage du descripteur pour l'application de la VIC sur les images expérimentales	139
Mesure de la traînée	139
4.3 Règles de mises à l'échelle, similitudes	142
4.3.1 Adimensionnement des équations	142
4.3.2 Théorème de Vashy-Buckingham	143
Énoncé	143
Démonstration	143
Mise en œuvre pour la mécanique du gonflable	144
4.3.3 Étude numérique de structures gonflables en deux dimensions à différentes échelles	145
Cas de la poutre biappuyée avec une charge ponctuelle	145
Cas d'une arche gonflable soumise à un vent latéral	146
4.4 Étude expérimentale d'un bâtiment gonflable à différentes échelles	150
4.4.1 Objectif et présentation de l'essai	150
4.4.2 Réalisation des maquettes	151
Géométrie, dimensions, matériaux et fabrication	151
Mise sous pression et étanchéité des maquettes	151
4.4.3 Montage expérimental	152
Réalisation des ancrages	152
Installation des maquettes dans la veine haute-vitesse	153
Méthodes de mesure et appareillage	153
4.4.4 Remarques générales et aspects techniques sur le déroulement des essais	156
4.4.5 Identification expérimentale des charges de plissage et de ruine	156
Influence de la pression de gonflage sur les charges de pli et de ruine	159
Influence du matériau sur les charges de pli et de ruine	160
4.4.6 Mesure du champ de pression	161
Utilisation des capteurs de pression développés	161
Utilisation de la VIC	165
4.4.7 Mesure du déplacement - rapport d'échelle	168
Validation de l'hypothèse de problème plan	168
Étude des maquettes réalisées dans un même matériau	168
4.4.8 Conclusion	177
4.5 Conclusion	177

Notations Principales

- Systèmes de coordonnées :

$\mathcal{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	Base globale cartésienne
(X, Y, Z)	Coordonnées cartésiennes
$\bar{\mathcal{B}}(\vec{e}_{\bar{x}}, \vec{e}_{\bar{y}}, \vec{e}_{\bar{z}})$	Base locale cartésienne
$(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$	Coordonnées cartésiennes locales
ξ	abscisse curviligne réduite
(r, ϕ, Z)	coordonnées cylindriques

- Géométrie :

D	Diamètre de l'arche
L	Longueur de la poutre ou de l'arche
R	Rayon de la poutre
H	Épaisseur du tissu
S	Section droite
I	Moment quadratique

- Cinématique :

$\mathbf{U}$	Champ de déplacement
(U, V, W)	Composantes du champ de déplacement
v	Vitesse du vent
θ_{Δ}	Rotation de section autour de l'axe Δ

- Chargement :

F	Force concentrée
f	Force répartie
p	Pression de gonflage
p_{vent}	Pression du vent
$P = p\pi R^2$	Résultante de pression

- Corrélation :

λ_k	Paramètres de contrôle de la courbe $\mathcal{C}$
B	Demi-épaisseur de l'image virtuelle
ξ	Coordonnée curviligne réduite

- Propriétés mécaniques du matériau :

Propriétés du textile

E_{ℓ}	Module de Young longitudinal
E_t	Module de Young transverse
$G_{\ell t}$	Module de cisaillement
$\nu_{\ell t}$	Coefficient de Poisson

Propriétés du fluide

ρ	Masse volumique
μ	Viscosité dynamique

- Coefficients :

k	Coefficient de section réduite
A_1	Rigidité de flexion adimensionnée
A_2	Rigidité de cisaillement adimensionnée
Π_i	Nombre adimensionné
C_p	Coefficient de pression
C_D	Coefficient de traînée
Re	Nombre de Reynolds

4.1 Introduction : les essais en soufflerie

4.1.1 Les souffleries

Le comportement des structures dans le vent est une problématique récurrente en ingénierie. Les premières souffleries sont apparues à la fin du XIX^e siècle. En 1871, Francis Herbert Wenham et John Browning construisent la première soufflerie dans le cadre de travaux sur les machines volantes. Constantin Tsiolkovski bâtit la première soufflerie de Russie en 1897 et publie la même année une étude dans laquelle il détermine les coefficients de traînée d'une sphère, d'un cylindre, d'un cône et autres géométries simples. Le développement des souffleries est très lié à l'aéronautique. Ainsi, les frères Wright fabriquent leur propre soufflerie pour améliorer les performances de leur planeur en 1901. La première soufflerie française est celle de Gustave Eiffel qui conçoit en 1909 la première soufflerie à recirculation d'air. La soufflerie d'Eiffel est à veine ouverte et est constituée d'un tunnel droit contenant une chambre d'essai au centre. L'air entrant vient directement du bâtiment et est éjecté en sortie dans le même bâtiment, le système est schématisé sur la figure 4.1(a). La même année, Ludwig Prandtl élabore la première soufflerie à circuit fermé, schématisée sur la figure 4.1(b), au Centre de Recherche Aérodynamique de Göttingen. Les souffleries actuelles reprennent les principes de ces deux types élémentaires. L'utilisation d'une soufflerie à veine fermée présente un double avantage : une soufflerie à veine ouverte peut, dans le cas où l'air est directement puisé à l'extérieur, être tributaire des conditions climatiques (variations de pression, de température). La recirculation du flux dans une veine fermée assure une certaine homogénéité de l'air. De plus, la consommation énergétique d'une soufflerie à veine fermée est réduite en comparaison avec une soufflerie à veine ouverte puisque la puissance motrice ne sert plus à l'établissement du flux, mais seulement à l'entretien de son mouvement.

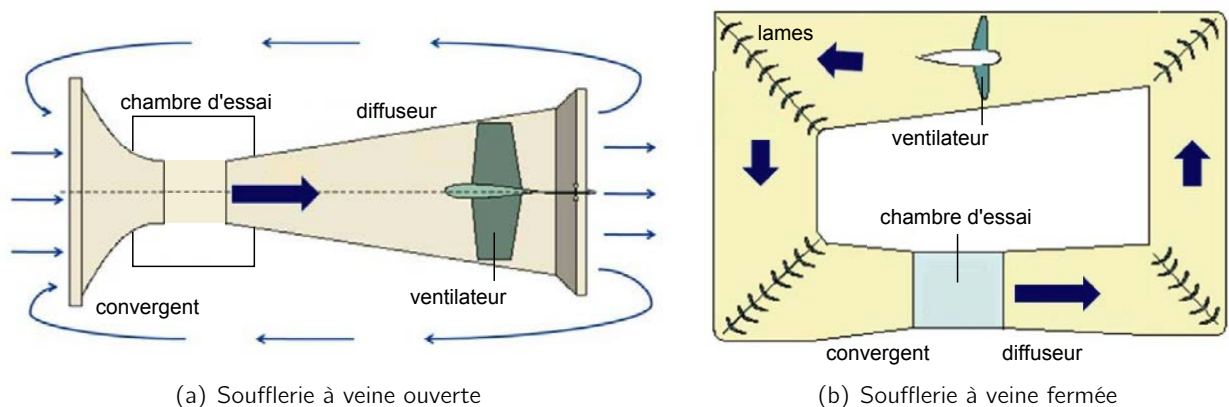


Fig. 4.1 – Schématisation des deux types de soufflerie à recirculation d'air : (a) veine ouverte de type Eiffel et (b) veine fermée (source Nasa).

Le développement de méthodes numériques telles que la CFD (Computational Fluid Dynamics) n'a pas rendu les souffleries obsolètes. La modélisation de comportements complexes comme l'action d'un écoulement turbulent sur une structure n'est possible que par la réalisation d'essais en soufflerie, les ressources numériques restant insuffisantes aujourd'hui. Les souffleries les plus adaptées à la reproduction des phénomènes turbulents liés au vent sont les souffleries à couche limite atmosphérique (ou Boundary Layer Wind Tunnel - BLWT) qui permettent la reproduction fidèle d'un vent à une échelle de l'ordre de 1/300, ce qui implique de fabriquer un modèle réduit de la structure étudiée à une échelle identique.

4.1.2 Un outil de dimensionnement dans le Génie Civil et la Construction

Bien que fortement liés au domaine aéronautique au cours de leur développement, les essais en soufflerie trouvent aujourd'hui de nombreuses applications dans les domaines de la construction et du génie civil pour

le dimensionnement au vent d'une structure. La plupart des essais en soufflerie sont menés sur des modèles à échelle réduite. On distingue deux approches de modélisation selon le comportement de la structure face au vent : Dans le cas où la structure étudiée présente de faibles déplacements à taille réelle, le comportement de la structure peut être simulé à l'aide d'une maquette rigide comme c'est le cas pour la plupart des bâtiments. Il s'agit d'une approche quasi-statique qui permet la caractérisation des charges locales pour le dimensionnement de la structure. Le comportement dynamique de la structure peut ensuite être étudié au moyen d'outils numériques. Si les déplacements de la structure à taille réelle sont importants, l'approche quasi-statique présentée ci-dessus n'est plus représentative du comportement de la structure. Ce cas de figure concerne notamment les ponts, ou plus généralement les structures souples, qui peuvent-être confrontées à des instabilités aérodynamiques. La destruction du pont de Tacoma, illustrée sur la figure 4.2, par le vent en 1941 est une conséquence de ces instabilités dynamiques : en effet, ce n'est pas la force du vent, qui ne soufflait qu'à 60 km/h, qui a provoqué l'effondrement du pont mais un effet aéroélastique de couplage entre la force exercée par le vent et le déplacement du tablier. L'étude du comportement d'une telle structure passe par la réalisation d'une maquette aérodynamique permettant la reproduction à échelle réduite du déplacement de la structure réelle.



Fig. 4.2 – Effondrement du pont de Tacoma Narrows à la suite d'un effet de couplage aéroélastique entre la force exercée par le vent et le déplacement du tablier.

En conclusion, les résultats des essais en soufflerie renseignent les ingénieurs sur plusieurs points fondamentaux :

- La stabilité de la structure étudiée ;
- les déplacements maximaux pour un niveau de vent donné ;
- les zones d'applications des charges ;
- l'identification des zones les plus sensibles au chargement.

La plupart des grands ouvrages de génie civil tels que les ponts, les tours [BRZ14], ou bien les stades [BBM⁺06] font aujourd'hui l'objet d'essais en soufflerie dans l'étape de dimensionnement dont certaines contiennent des parties textiles, on peut par exemple citer l'étude menée sur le toit du stade de Olympique de Montréal [IW79] ou plus récemment le stade Vélodrome de Marseille [VOB⁺15].

4.1.3 La nécessité des essais en soufflerie pour les structures gonflables

Dans le calcul numérique, l'action du vent sur une structure est généralement modélisée par une charge statique définie par le produit de la pression dynamique par un coefficient de pression C_p . Cette approche implique que les changements dans la géométrie de la structure restent mineurs et suffisamment faibles pour

être négligés si bien que les coefficients C_p sont conservés tout au long du chargement. Seulement, cette approche est limitée dans le cas où la structure se déforme ou se déplace de manière importante. C'est le cas des structures gonflables. La figure 4.3 illustre ce phénomène sur une poutre gonflable exposée à un vent de vitesse v . Pour une petite vitesse de vent v_1 la pression est uniformément répartie et les coefficients C_p^1 sont les mêmes en tout point de la poutre. La vitesse $v_2 > v_1$ provoque un déplacement limité qui ne modifie pas la géométrie du problème et la pression peut être considérée comme uniformément répartie, la variation des coefficients de pression est alors négligée et $C_p^2 = C_p^1$. Cependant, lorsque la vitesse du vent augmente davantage (c'est le cas pour v_3 et v_4), la géométrie de la poutre est très différente de l'état initial et la pression ne peut plus être considérée comme uniformément répartie. Ainsi, les coefficients de pression sont différents des coefficients de pression appliqués sur l'état initial (*i.e.* pour $v = v_1$) $C_p^4 \neq C_p^3 \neq C_p^1$. C'est un problème d'interaction fluide-structure. En outre, ce champ de pression dépend du régime d'écoulement, et donc du nombre de Reynolds. L'étude de la répartition de la pression sur une structure gonflable fait l'objet de rares travaux. On trouve dans les actes du premier colloque sur les structures gonflables organisé par l'IASS en 1967 un premier papier sur l'étude d'une sphère pressurisée en soufflerie [BM67] et un second sur l'étude d'un bâtiment gonflable sous chargement de neige ou de vent [RB67]. Cette dernière étude n'est pas réalisée en soufflerie mais en statique à l'aide d'une combinaison de masses appliquées en différents points de la structure.

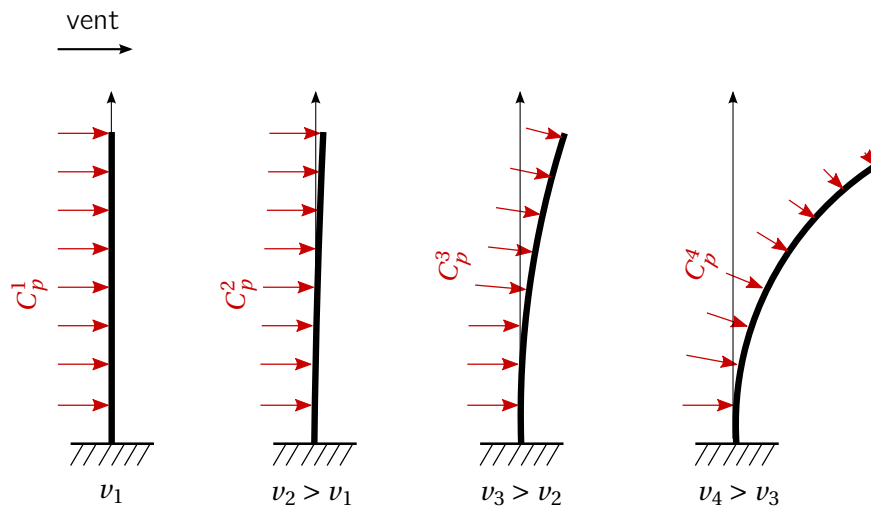


Fig. 4.3 – Évolution des coefficients de pression C_p appliqués sur une poutre gonflable dont la géométrie évolue au cours du chargement.

Les coefficients de pression C_p pour de grandes déformées ne sont pas définis dans la littérature ou dans les réglementations existantes. Il est donc indispensable de réaliser des essais en soufflerie (ou des calculs CFD si on s'intéresse à des déformées moyennes) pour déterminer les valeurs des coefficients de pression C_p , et plus particulièrement pour les deux chargements particuliers que sont la charge de pli et la charge de ruine.

4.1.4 Les verrous scientifiques à lever

Les études menées dans ce chapitre ont pour ambition la levée de deux verrous scientifiques importants : la compréhension et la modélisation des actions du vent sur les structures gonflables et le développement de modèles réduits de structures gonflables avec comme objectif à long terme, la réalisation de maquettes à une échelle suffisamment réduite pour être testée en soufflerie à couche limite atmosphérique. La méthode employée repose sur deux campagnes d'essais. La première campagne concerne une poutre gonflable simple dont l'objectif est l'étude de la traînée et l'identification des charges de pli et de ruine, les mesures sont réa-

lisées par corrélation d'image virtuelle, selon la procédure décrite au chapitre 3, et les charges obtenues pour le pli et la ruine sont comparés aux charges calculées à l'aide des modèles analytiques développés au chapitre 2. La seconde campagne d'essais est réalisée sur un bâtiment gonflable demi-cylindrique fabriqué à trois échelles différentes, l'objectif est l'identification des conditions de similitudes et la mesure des coefficients de pression.

4.2 Étude de la traînée d'une poutre gonflable en soufflerie

Une première campagne d'essais est réalisée sur une poutre gonflable en soufflerie. Le but recherché est la validation des charges de pli et de ruine ainsi que la validation et le recalage des modèles en petits déplacements sur un chargement complexe tel que le vent. Ce premier essai permet aussi l'identification de la traînée sur une poutre gonflable. Cet essai est l'occasion de mettre en œuvre l'outil de mesure développé à partir de la VIC dans un environnement instable.

4.2.1 Montage expérimental

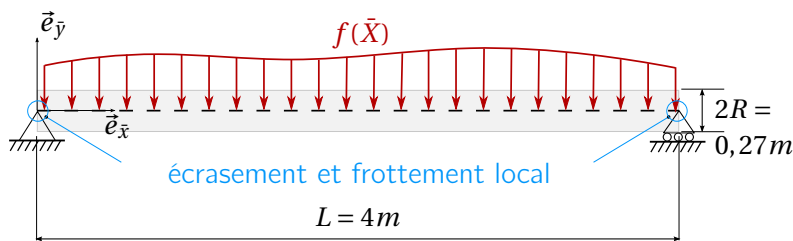


Fig. 4.4 – Poutre biappuyée soumise à une charge de vent $f(\bar{x})$ en soufflerie, problématique de la réalisation des appuis.

L'essai consiste en l'étude d'une poutre biappuyée, sur la figure 4.4, de section circulaire soumise à une charge répartie représentant l'action du vent. La poutre présente un rayon $R = 0,135 \text{ m}$ et une longueur L entre appui de 4 m en configuration initiale (*i.e.* configuration pressurisée). Elle est conçue en tissu Ferrari F302 dont les propriétés mécaniques sont connues. La première étape est la réalisation des ancrages. La réalisation d'appuis glissants en soufflerie doit respecter plusieurs critères : ces appuis ne doivent pas perturber l'écoulement, assurer le maintien de la poutre en dehors de la couche limite et éviter tout phénomène d'écrasement ou de frottement local ou niveau de la liaison. Pour répondre à ces problématiques, deux anneaux en résine de diamètre intérieur égal au diamètre extérieur de la poutre en configuration naturelle sont réalisés. La mise sous pression assure le maintien des anneaux sur la poutre. Cette opération limite le frottement et l'écrasement au niveau de la liaison. La connexion au bâti est assurée par des câbles d'acier qui permettent la maîtrise de la hauteur de la poutre dans la veine d'essai et dont la longueur de $6,15 \text{ m}$ élimine tout effet de traction dans la poutre. Ces câbles sont connectés aux anneaux de résine par l'ajout de deux serres-câble sur ce dernier. Enfin les câbles sont attachés au mur par l'intermédiaire d'anneaux de levage et de manilles. Théoriquement, seuls deux câbles suffisent à maintenir la poutre en place mais dans le but d'assurer la stabilité du montage dans l'écoulement 4 câbles sont installés. Le montage est présenté sur la figure 4.5.

Une rampe d'éclairage est construite pour compléter le dispositif expérimental et réaliser la prise de vue nécessaire à l'application de la VIC. Cette rampe a pour objectif d'homogénéiser l'éclairage dans la veine afin d'éviter les reflets ou tout autre artefacts pouvant perturber la corrélation d'une part et de servir de support à l'appareil photo d'autre part. Cette structure doit être légère et aérodynamique. La rampe d'éclairage est visible sur la figure 4.6. Elle est constituée d'une échelle légère en aluminium de $2,3 \text{ m}$ sur laquelle 4 tiges filetées sont soudées. Ces tiges permettent la fixation au plafond de la rampe. 4 planches de bois sont

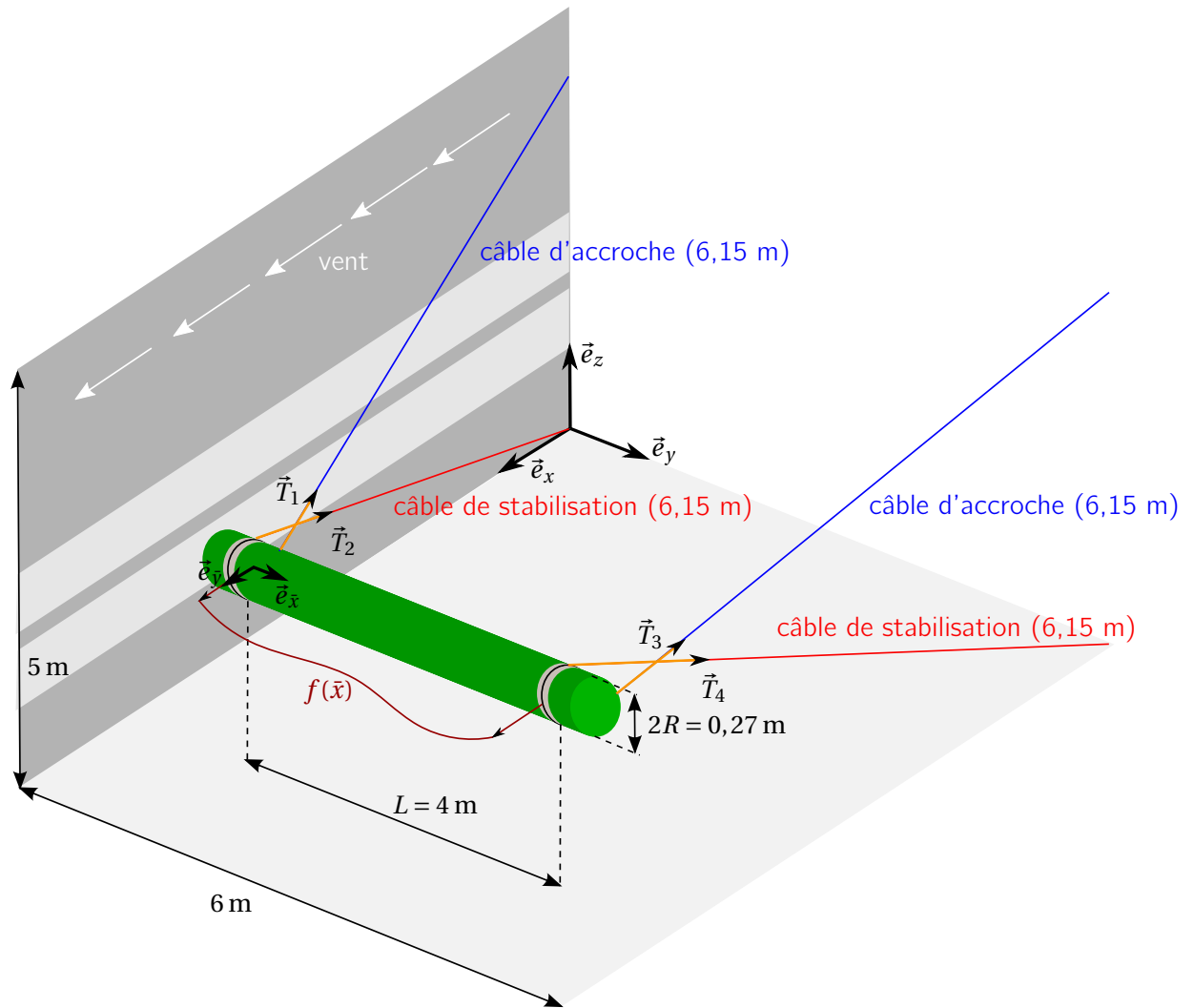


Fig. 4.5 – Vue schématique du montage expérimental pour l'étude d'une poutre biappuyée en soufflerie.

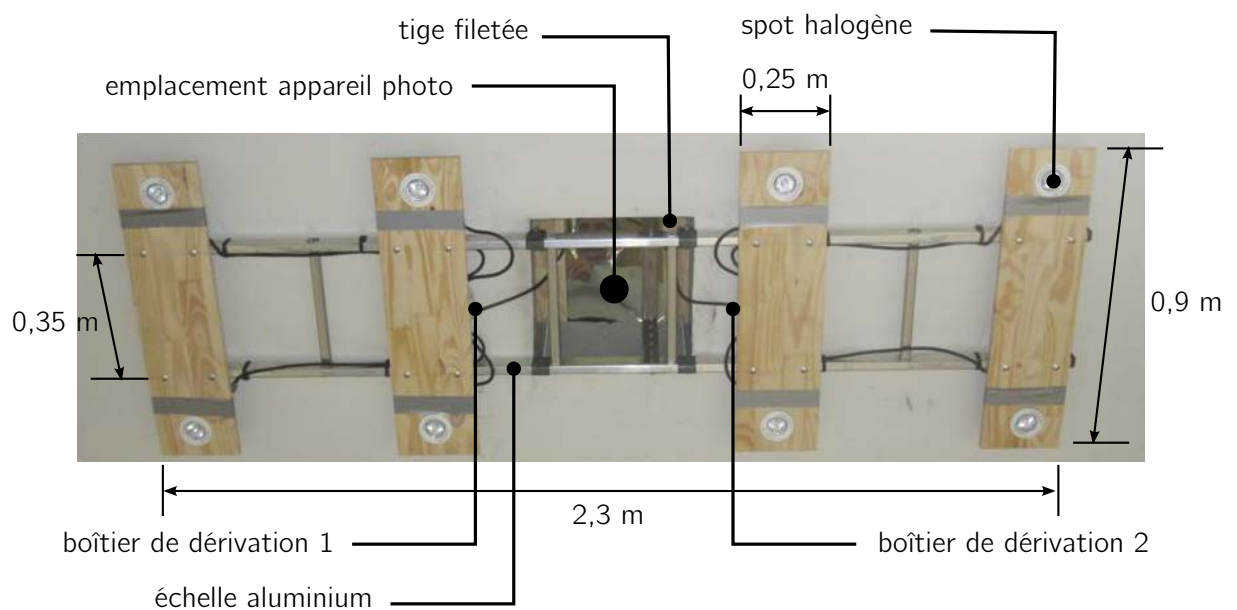


Fig. 4.6 – Dimensions, réalisation et positionnement de la rampe d'éclairage au plafond de la soufflerie au dessus de la poutre étudiée.

ensuite fixées sur l'échelle et équipées chacune de deux spots encastrés. Ces spots sont reliés 4 à 4 à deux boîtiers électriques permettant la mise en fonctionnement de l'éclairage. La fixation au plafond s'effectue par l'utilisation d'une trappe carrée de dimension 40cm × 40cm pour brider l'échelle à partir des tiges filetées munie d'écrous papillon et de deux planches. Une nacelle est nécessaire à l'opération. L'appareil photo Kodak Pro DCS14n est installé à l'intérieur de la trappe à l'abri du vent sur une crémaillère, il est équipé d'un système de déclenchement à distance sans fil.

4.2.2 Étude analytique de poutre

La poutre est pressurisée à $p = 0,3$ bar et la charge répartie $f(\bar{X})$ est supposée uniforme. Le moment de flexion dans la poutre est alors donné, dans la base locale $\bar{\mathcal{B}}(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$, par l'expression :

$$M(\bar{X}) = \frac{f}{2} \bar{X}(\bar{X} - L) \quad (4.1)$$

Le moment étant maximal en $\bar{X} = L/2$, la charge d'apparition du pli est obtenue par,

$$M(\bar{X} = L/2) = \frac{pI}{2} \quad (4.2)$$

soit,

$$f^{pli} = 4 \frac{pI}{L^2} \quad (4.3)$$

la force de ruine est déduite par :

$$f^{ruine} = \frac{\pi}{2} f^{pli} = 2\pi \frac{pI}{L^2} \quad (4.4)$$

L'application numérique donne la charge de pli $f^{pli} = 57,9$ N/m et la charge de ruine $f^{ruine} = 91,1$ N/m. L'expression de la traînée,

$$f = \frac{1}{2} \rho C_D D v^2 \quad (4.5)$$

où ρ et la masse volumique de l'air et C_D le coefficient de traînée donné en fonction du nombre de Reynolds (fig. 4.7) et $D = 2R$ une dimension caractéristique de l'écoulement où le nombre de Reynolds s'exprime :

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (4.6)$$

avec $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ et $\mu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Pa/s}$ pour l'air à 20°C (Eurocodes).

L'évolution de la valeur de la force exercée par le vent sur la structure est tracée en fonction de la vitesse de ce dernier sur la figure 4.8. Un plateau apparaît sur la courbe lorsque la vitesse du vent se trouve entre 10 m/s et 20 m/s, ce plateau est dû à l'évolution du coefficient de traînée C_D dans la gamme de nombre de Reynolds relative au problème étudié (fig. 4.7). L'analyse de la courbe théorique vitesse-force exercée par le vent, tracée sur la figure 4.8 permet l'identification des vitesses de vent provoquant le pli v^{pli} et la ruine v^{ruine} . Par lecture graphique, $v^{pli} \simeq 35 \text{ m/s}$ et $v^{ruine} \simeq 41 \text{ m/s}$. Le coefficient de traînée est donné pour un cylindre lisse, ce qui n'est pas tout à fait le cas de la paroi de la poutre. L'étude de la traînée permet de valider ou non l'hypothèse de paroi lisse en comparant les résultats expérimentaux à cette courbe théorique.

4.2.3 Protocole expérimental

Le protocole expérimental consiste à tracer la courbe vitesse-force exercée par le vent en réalisant une série de 5 mesures pour des vents compris entre 20 m/s et 45 m/s. Les mesures commencent à 20 m/s en

raison du montage qui nécessite un vent minimum pour se mettre en place et se limitent à une vitesse maximale de 45 m/s car l'instabilité de la poutre est très importante au delà. On procède aux mesures par incrémentation de 5 m/s.

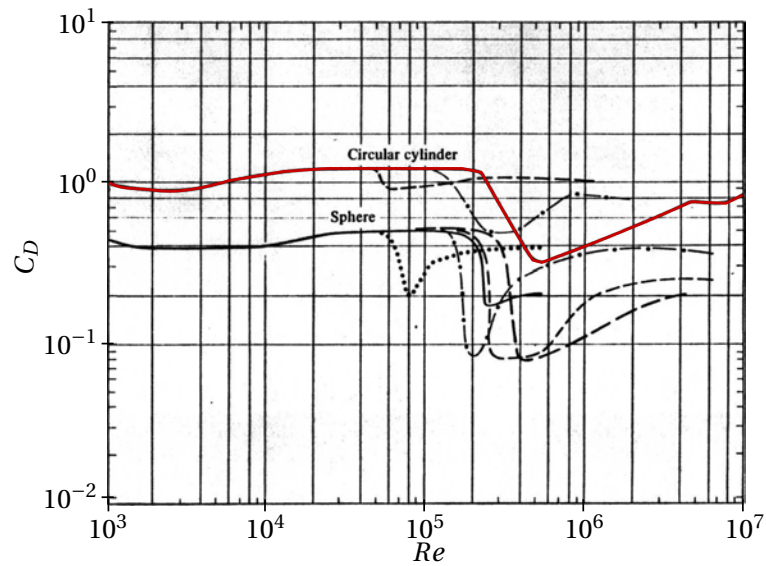


Fig. 4.7 – Évolution du coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre et une sphère de rugosité variable (University of Delaware).

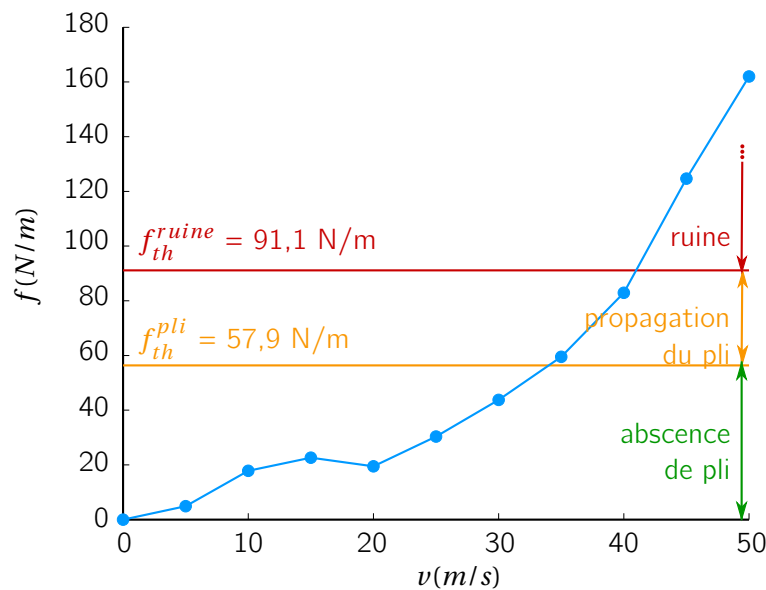


Fig. 4.8 – Relation entre la traînée f exercée sur la poutre et la vitesse v du vent, identification des vitesses critiques pour lesquelles le pli et la ruine sont atteints.

4.2.4 Résultats

Remarques générales

De nombreux effets dynamiques apparaissent au cours des essais. Des mouvements parasites latéraux par rapport à l'écoulement se produisent pour toutes les vitesses de vent. Ces mouvements diffèrent en fréquence et en amplitude selon les vitesses. Par simple contrôle visuel, ces mouvements augmentent en fréquence et en amplitude avec l'accroissement de la vitesse. Cependant la courbure de la poutre reste relativement stable. Des vibrations de la paroi textile sont également observées pour certaines vitesses. Le vent

n'étant pas parfaitement constant tout au long de la période d'étude, la poutre peut s'élever ou s'abaisser en cas de bourrasque. Ces phénomènes rendent le post-traitement par VIC difficile puisque la qualité de l'image est affectée par ces variations de position de la poutre. De plus, l'occurrence de bourrasque introduit une incertitude sur la vitesse de vent réelle au moment de la prise de vue. Malgré ces difficultés, les essais sont menés avec attention pour effectuer la prise de vue au moment le plus opportun, c'est à dire en effectuant les mesures dès que la poutre connaît une période de stabilité.

Analyse visuelle des images

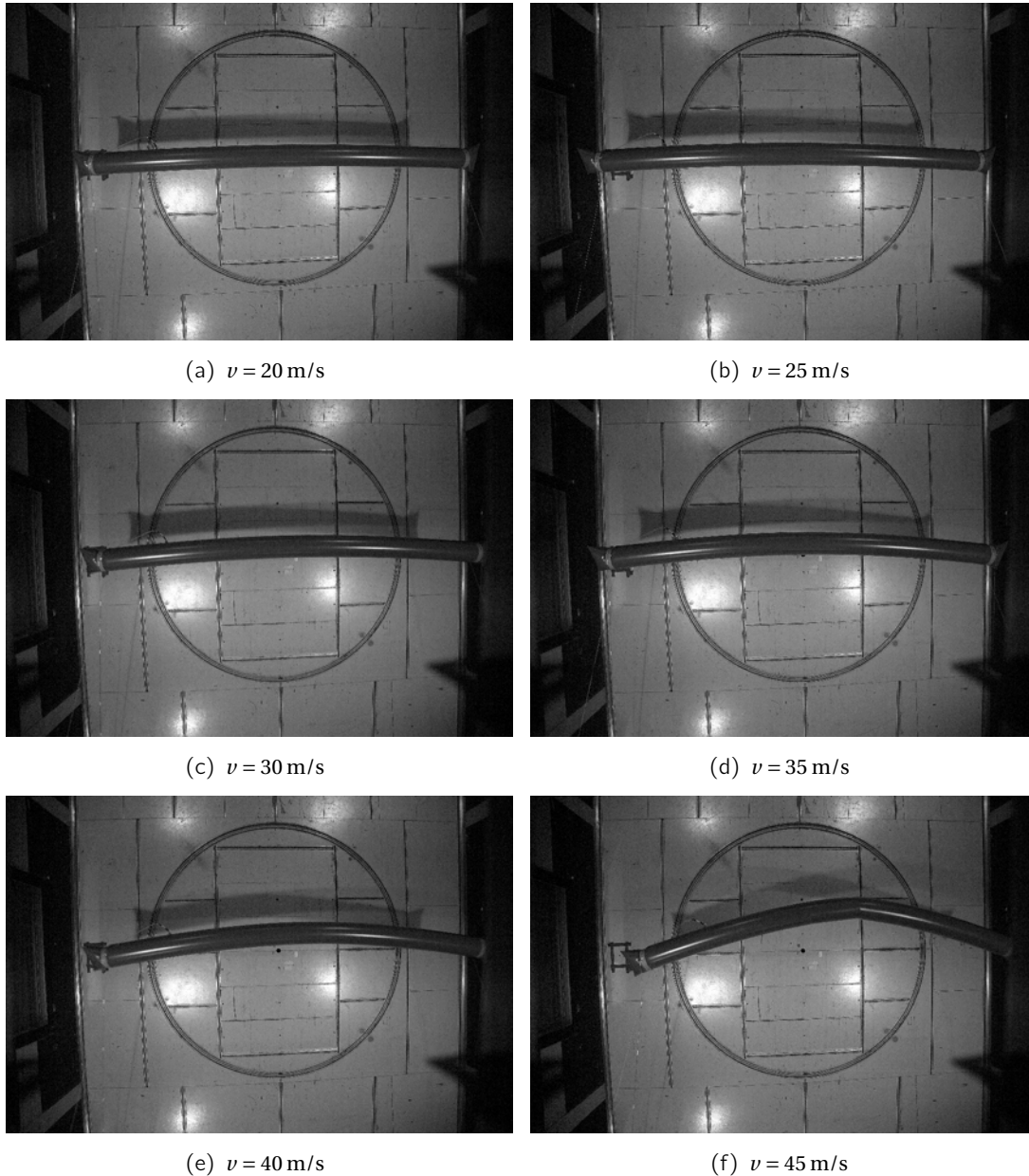


Fig. 4.9 – Déformée observée de la poutre biappuyée dans la soufflerie à plusieurs vitesses de vent : (a) $v = 20 \text{ m/s}$, (b) $v = 25 \text{ m/s}$, (c) $v = 30 \text{ m/s}$, (d) $v = 35 \text{ m/s}$, (e) $v = 40 \text{ m/s}$ et (f) $v = 45 \text{ m/s}$.

Les photos réalisées à chaque vitesse de vent sont regroupées sur la figure 4.9. La visualisation de ces photos permet de valider la charge de ruine. La ruine est clairement visible sur la déformée à $v = 45 \text{ m/s}$ (fig. 4.9(f)) ce qui n'est pas le cas sur la déformée à $v = 40 \text{ m/s}$ (fig. 4.9(e)). Ce résultat est cohérent avec le calcul analytique précédent (fig. 4.8) qui prévoit la ruine aux alentours de $v = 40 \text{ m/s}$. L'inspection visuelle

des photos ne met pas en évidence l'apparition du pli, il semble cependant que ce dernier apparaisse pour une vitesse plus importante que la vitesse anticipée théoriquement, ce qui signifie que la traînée est moins importante que celle anticipée. L'identification de la charge de pli nécessite un post-traitement des images par la VIC.

Paramétrage du descripteur pour l'application de la VIC sur les images expérimentales

La VIC est utilisée sur les photos de la déformée de la poutre à plusieurs vitesses de vent (fig. 4.9). Le matériau a été caractérisé lors d'un cas test, présenté au chapitre 3, au cours duquel les produits des modules de Young longitudinal E_ℓ et de cisaillement $G_{\ell t}$ avec l'épaisseur H du tissu sont identifiés comme :

$$\begin{cases} E_\ell H \approx 2,5 \cdot 10^5 \text{ N/m} \\ G_{\ell t} H \approx 4 \cdot 10^3 \text{ N/m} \end{cases} \quad (4.7)$$

On utilise le contour virtuel présenté dans le chapitre 3. En raison des grands déplacements, on choisit d'utiliser l'élément fini de poutre gonflable pour obtenir la flèche et la rotation de section au delà du pli. 7 paramètres de contrôle sont introduits pour réaliser l'optimisation : le mouvement de corps rigide ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), la longueur de la poutre λ_4 , les paramètres λ_5 et λ_6 sont attribués au rayon de la poutre à chaque extrémité - ce choix est justifié pour affiner le résultat de la corrélation, le rayon n'est pas constant sur la poutre en raison d'un effet de perspective -, et le dernier paramètre λ_7 représente l'amplitude de la charge considérée comme uniformément répartie. Les paramètres de contrôle sont représentés sur la figure 4.10.

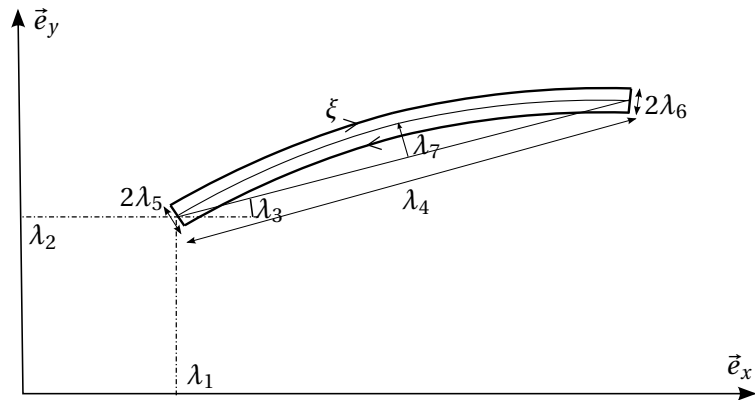


Fig. 4.10 – Représentation des paramètres d'optimisation pour l'application de la VIC sur la poutre gonflable.

Les paramètres de contrôle sont initialisés de la manière suivante : le mouvement de corps rigide et les caractéristiques géométriques sont renseignés par une saisie de l'utilisateur et l'amplitude initiale de la force est donnée par la valeur théorique (fig. 4.8).

Mesure de la traînée

Les résultats de la VIC apparaissent sur la figure 4.11. La première conclusion concerne l'adéquation du modèle utilisé pour la corrélation : l'obtention d'un résultat en fin de corrélation indique que le modèle choisi est pertinent. L'erreur de corrélation Φ_c est inférieure à 10% dans tous les cas. L'erreur la plus importante est relevée pour l'analyse de la poutre à 30 m/s. En approfondissant l'analyse, on remarque que l'extrémité de droite n'est pas bien définie (noire sur fond noir) ce qui rend très difficile l'identification du terme λ_6 . Cependant, le meilleur outil pour juger la qualité de la corrélation est l'étude de l'image physique dans le repère du contour virtuel. Ce résultat est présenté sur la figure 4.12. L'épaisseur du contour virtuel est de 6 pixels, cette dimension est à comparer à la taille de l'image physique qui est de 4500×3000 pixels. Le sens de parcours du contour virtuel est rappelé sur la figure 4.12 par l'ajout de point particuliers (A, B, C, D, E

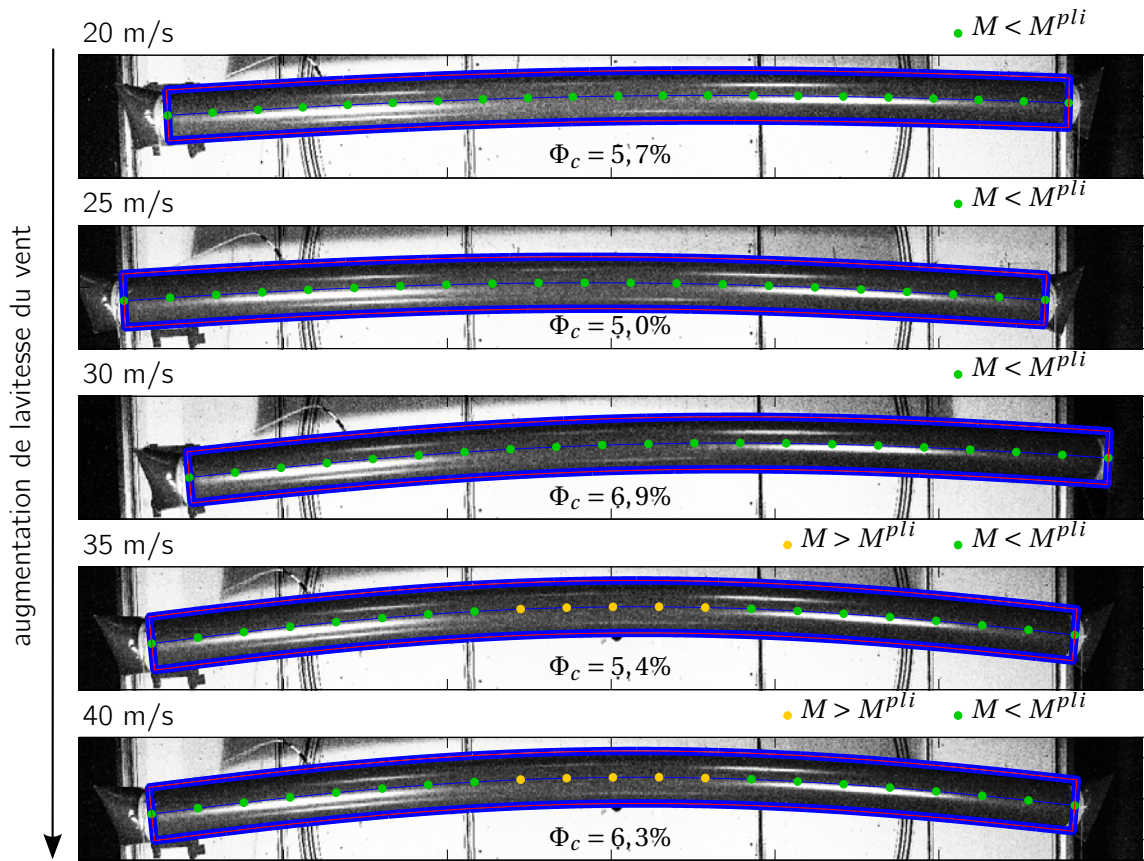


Fig. 4.11 – Résultat de la corrélation : position du contour virtuel sur l’image physique et valeur du moment de flexion identifié dans les sections.

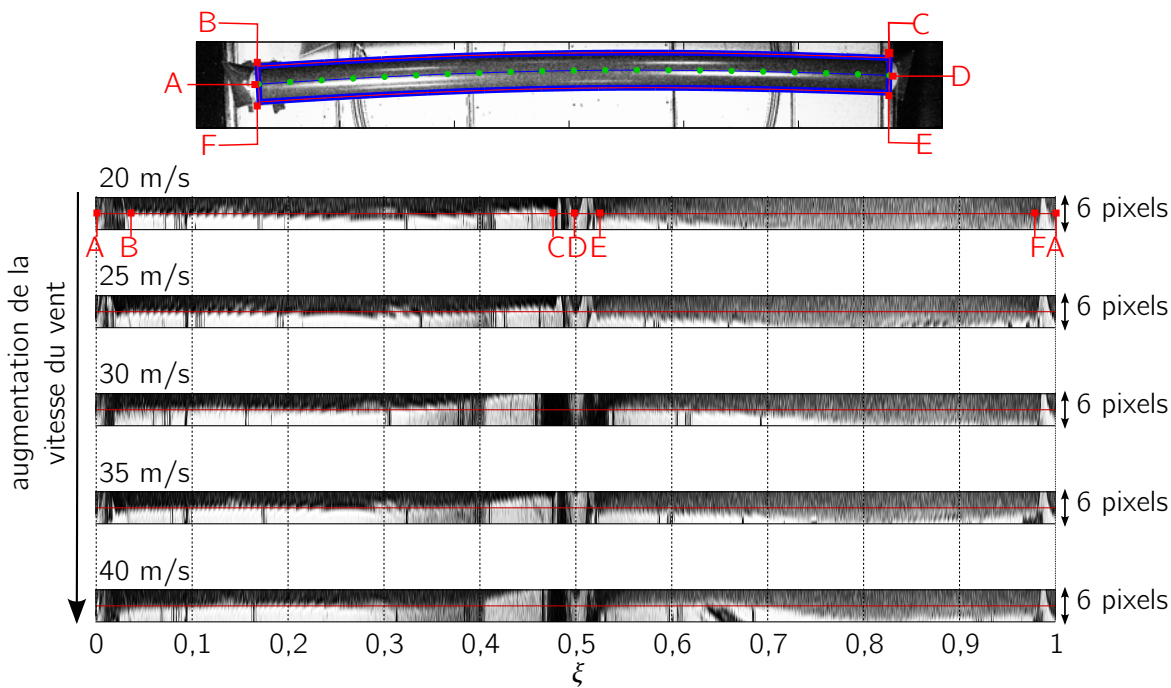


Fig. 4.12 – Représentation de l’image physique dans le repère du contour virtuel.

et F) et repéré par l'abscisse curviligne réduite ξ ($\xi = 0$ au point A, $\xi = 0,5$ au point D puis $\xi = 1$ à nouveau en A). Dans le cas d'une corrélation parfaite, la partie supérieure du contour sur la figure 4.12 est noire et la partie inférieure blanche. On observe une meilleure corrélation sur la partie du contour située entre les points B et C (*i.e.* pour $0 < \xi < 0,5$) que sur les autres parties du contour, ceci est dû à la qualité des niveaux de gris de l'image physique qui est plus contrastée à certains endroits. Le pré-traitement de l'image est en ce sens important.

La traînée identifiée par l'utilisation de la VIC est tracée sur la figure 4.13 et comparée à la traînée théorique. Le résultat montre une très grande proximité entre les courbes expérimentale et théorique. L'écart entre les deux courbes s'explique d'une part par l'erreur observée sur la corrélation et les effets dynamiques mais également par l'erreur commise lors du calcul théorique de la traînée qui nécessite une lecture graphique de la courbe C_D-Re sur la figure 4.7 dans sa zone la plus défavorable. Au delà de la traînée, l'utilisation de la VIC apporte une information primordiale qui est l'état de la section par le calcul du moment de flexion. La zone déchargée est identifiée sur la déformée de la poutre et est repérée sur la figure 4.11 par des marqueurs orange. Cette analyse permet d'identifier expérimentalement la charge de pli entre 30 et 35 m/s. Ce résultat est cohérent avec la valeur attendue d'environ 35 m/s. La charge de ruine ne peut pas être identifiée par la VIC dans cet exemple puisque la déformée à 45 m/s est trop importante (et au delà de la ruine) et le modèle de référence n'est plus pertinent. La conclusion sur la charge de ruine se limite à l'analyse visuelle des images.

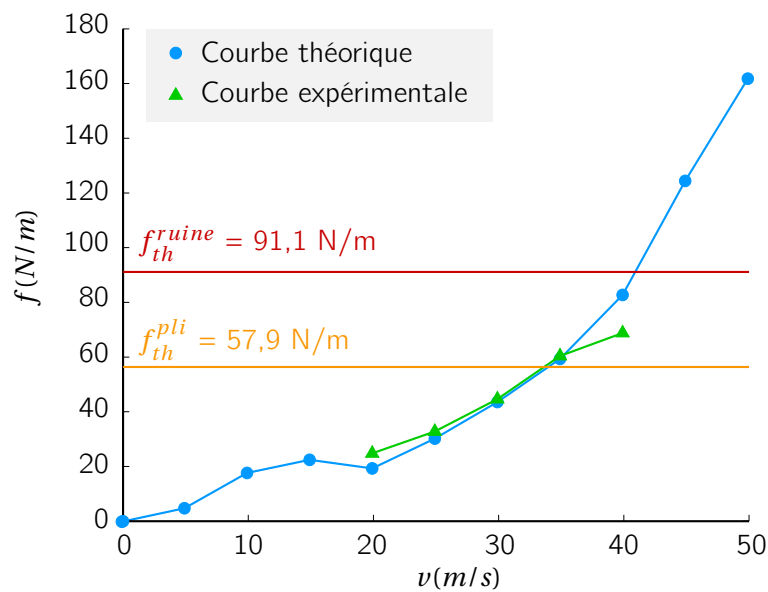


Fig. 4.13 – Comparaison des courbes de la traînée f exercée sur la poutre en fonction de la vitesse v du vent obtenues expérimentalement et théoriquement.

Cet essai permet de conclure sur plusieurs points : le modèle élément fini poutre gonflable adapté à la présence du pli est pertinent puisque la corrélation s'effectue dans chaque cas avec une erreur limitée et permet l'identification d'une traînée très proche de la valeur théorique sur la figure 4.13 (rappelons que l'adéquation des modèles est un enjeu de la thèse). Ce résultat est d'autant plus satisfaisant que les conditions expérimentales ne sont pas optimales (effets dynamiques, stabilité de la poutre) et la qualité des images expérimentales n'est pas idéale en raison d'un manque de contraste entre la poutre et le sol de la soufflerie. L'essai confirme donc la méthode de mesure (*i.e.* la VIC) envisagée pour la suite.

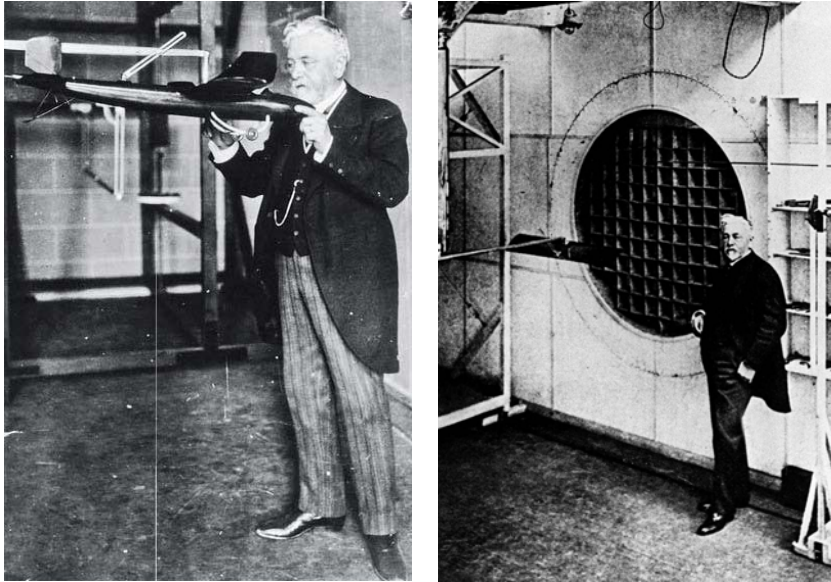


Fig. 4.14 – Gustave Eiffel étudiant un modèle réduit d’avion dans la soufflerie d’Auteuil, construite en 1912 et toujours en activité.

4.3 Règles de mises à l’échelle, similitudes

Le comportement des structures dans le vent obéit la plupart du temps à des équations complexes dont les solutions ne peuvent pas être déterminées analytiquement, le recours à l’expérience est indispensable. Ce constat est à l’origine du développement des souffleries évoqué en introduction. La taille limitée des souffleries a soulevé très vite la question des modèles réduits. La figure 4.14 montre Gustave Eiffel manipulant un modèle réduit d’avion dans la soufflerie d’Auteuil en 1912. Cependant, pour toute structure, les résultats expérimentaux obtenus sur un modèle réduit ne sont transposables à la structure taille réelle que sous certaines conditions dites de similitude. Ces conditions de similitude s’expriment sous trois formes :

- La **Similitude géométrique** est respectée si le rapport des dimensions du modèle réduit et de la structure taille réelle est constant ;
- La **Similitude cinématique** nécessite que l’écoulement soit de même nature autour du modèle réduit et de la structure taille réelle, c’est à dire que le rapport des accélérations en tout points des deux écoulements est le même (les lignes de courants sont les mêmes) ;
- La **Similitude dynamique** se traduit par la conservation du rapport des forces appliquées à des éléments homologues du modèle réduit et de la structure taille réelle.

Les conditions de similitudes peuvent être identifiées de différentes façon : en adimensionnant les équations du problèmes lorsqu’elles sont connues [Rab08], ou bien en appliquant le théorème de Vashy-Buckingham. La réalisation de modèle réduit pour les structures gonflables est très peu évoquée dans la littérature. On soulignera toutefois les travaux de Biétry [Bie75] qui propose un modèle de réduction d’échelle pour les membranes pressurisées à partir des équations d’équilibre.

4.3.1 Adimensionnement des équations

Lorsque des solutions analytiques sont disponibles, la reproduction d’un même comportement à différentes échelles est aisée. Le déplacement d’une poutre gonflable biappuyée soumise à une charge ponctuelle en son

milieu est régi par l'équation suivante dans la base locale [Ngu14] :

$$V(\bar{X}) = \begin{cases} \frac{F\bar{X}}{48(E_\ell + P/S)I} (3L^2 - 4\bar{X}^2) + \frac{F\bar{X}}{2(P + kG_{\ell t}S)} & \text{si } \bar{X} \in [0, L/2] \\ \frac{F(L-\bar{X})}{48(E_\ell + P/S)I} (8L\bar{X} - 4\bar{X}^2 - L^2) + \frac{F(L-\bar{X})}{2(P + kG_{\ell t}S)} & \text{si } \bar{X} \in [L/2, L] \end{cases} \quad (4.8)$$

qui peut s'écrire,

$$\frac{V(\bar{X})}{L} = \begin{cases} \frac{FL^2}{48(E_\ell + P/S)I} \frac{\bar{X}}{L} \left(3 - 4\left(\frac{\bar{X}}{L}\right)^2 \right) + \frac{F}{2(P + kG_{\ell t}S)} \frac{\bar{X}}{L} & \text{si } \bar{X} \in [0, L/2] \\ \frac{FL^2}{48(E_\ell + P/S)I} \left(1 - \frac{\bar{X}}{L} \right) \left(8\frac{\bar{X}}{L} - 4\left(\frac{\bar{X}}{L}\right)^2 - 1 \right) + \frac{F}{2(P + kG_{\ell t}S)} \left(1 - \frac{\bar{X}}{L} \right) & \text{si } \bar{X} \in [L/2, L] \end{cases} \quad (4.9)$$

où l'on voit apparaître deux nombres adimensionnés

$$A_1 = \frac{FL^2}{(E_\ell + P/S)I} \quad (4.10)$$

$$A_2 = \frac{F}{(P + kG_{\ell t}S)} \quad (4.11)$$

La conservation de ces deux nombres adimensionnés d'un problème à l'autre mène à une même solution : le passage d'un cas à l'autre est d'autant plus facile. Cette approche est limitée par la connaissance des équations analytiques régissant le problème mécanique étudié comme c'est le cas pour une poutre gonflable avant l'apparition du pli. Bien qu'un modèle analytique ait été développé dans le premier chapitre, l'adimensionnement des équations est plus complexe. Dès lors, d'autres approches sont nécessaires.

4.3.2 Théorème de Vashy-Buckingham

Le théorème de Vashy-Buckingham [Vas92] est fondamental dans la théorie des similitudes. Son application permet d'identifier combien de nombres adimensionnés indépendants peuvent être construits dans un problème physique impliquant q variables :

Énoncé

Le théorème de Vashy-Buckingham ou théorème Π affirme que pour un problème à q dimensions, $k = q - r$ nombres sans dimension indépendants sont nécessaires, avec r le rang de la matrice dimensionnelle associée au problème (en mécanique ce dernier est généralement égal à 3 car toutes les grandeurs peuvent s'exprimer en fonction des trois grandeurs fondamentales : la longueur (m), le temps (s) et la masse (kg)). Le problème à q dimensions :

$$a_1 = f(a_1, a_2, \dots, a_q) \quad (4.12)$$

se ramène alors à un problème de dimension $k < q$ exprimé en nombre sans dimension notés Π_i :

$$\Pi_1 = g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) \quad (4.13)$$

Démonstration

La dimension $[\Pi_j]$ de Π_j est :

$$[\Pi_j] = \prod_{i=1}^q (D_1^{\alpha_i} D_2^{\beta_i} \dots D_p^{\gamma_i})^{k_i} \quad (4.14)$$

or $[\Pi_j] = 0$, ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 k_1^j + \alpha_2 k_2^j + \dots + \alpha_q k_q^j = 0 & \text{pour } D_1 \\ \beta_1 k_1^j + \beta_2 k_2^j + \dots + \beta_q k_q^j = 0 & \text{pour } D_2 \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_1 k_1^j + \gamma_2 k_2^j + \dots + \gamma_q k_q^j = 0 & \text{pour } D_p \end{cases} \quad (4.15)$$

Le système défini par ces équations se compose de p équations linéaires et contient q inconnues k_i^j . Le déterminant

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_q \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_q \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

est différent de 0 et le rang de cette matrice est r , il existe alors $n - r$ solutions linéairement indépendantes.

Mise en œuvre pour la mécanique du gonflable

La mise en œuvre du théorème de Vaschy-Buckingham s'effectue selon quatre étapes :

- Isoler les q grandeurs physiques intervenant dans le problème donné ;
- écrire les dimensions de chacune de ces grandeurs dans le système d'unités de base ;
- déterminer le rang r de la matrice dimensionnelle associée ;
- rechercher les $k = q - r$ nombres sans dimension.

De manière générale, on cherche à identifier des nombres sans dimension ayant une signification physique tel le nombre de Reynolds ou le nombre de Froude. Cela n'est pas toujours possible dans le cas étudié.

L'application du théorème de Vaschy-Buckingham sur le problème de poutre gonflable montre qu'en réalité 4 nombres sans dimension décrivent le problème. Les grandeurs physiques intervenant dans le problème sont : la longueur L , le rayon R , la force F , la pression interne p et les modules d'élasticité exprimés par leur produit avec l'épaisseur H du tissu $E_\ell H$ et $G_{\ell t} H$ en configuration initiale (*i.e.* configuration pressurisée). La matrice dimensionnelle

	$L(m)$	$M(kg)$	$T(s)$
r	1	0	0
l	1	0	0
F	1	1	-2
p	-1	1	-2
$E_\ell H$	0	1	-2
$G_{\ell t} H$	0	1	-2

(4.17)

est de rang $r = 2$, et permet donc la constitution de quatre nombres sans dimension. Les variables fondamentales choisies sont le rayon r et la pression de gonflage p . Les groupes adimensionnés sont construits à partir des équations :

$$\begin{cases} \Pi_1 = R^{\alpha_1} p^{\alpha_2} L \\ \Pi_2 = R^{\beta_1} p^{\beta_2} F \\ \Pi_3 = R^{\gamma_1} p^{\gamma_2} E_\ell H \\ \Pi_4 = R^{\delta_1} p^{\delta_2} G_{\ell t} H \end{cases} \quad (4.18)$$

la résolution du système aboutit à l'identification,

$$\begin{cases} \Pi_1 = \frac{L}{R} \\ \Pi_2 = \frac{F}{pR^2} \rightarrow \Pi_2 = \frac{F}{p\pi R^2} = \frac{F}{P} \\ \Pi_3 = \frac{E_\ell H}{pR} \\ \Pi_4 = \frac{G_{\ell t} H}{pR} \end{cases} \quad (4.19)$$

Le terme Π_1 traduit simplement l'effet d'échelle. Le nombre Π_2 représente l'importance relative du chargement extérieur par rapport à la résultante de la pression interne. Les termes Π_3 et Π_4 n'ont pas de signification physique proprement dite mais le rapport entre les deux exprime la prédominance des effets de flexion ou de cisaillement.

Les termes A_1 et A_2 identifiés par l'analyse dimensionnelle des équations (4.9) sont une combinaison de Π_1 , Π_2 , Π_3 et Π_4 . A partir de l'équation (4.10), on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Fl^2}{(E_\ell + P/S)I} \\ &= \frac{Fl^2}{(E_\ell \pi R + p\pi R^2/2)R^2} \\ &= \frac{F\Pi_1^2}{(E_\ell/(pR) + 1/2)p\pi R^2} \\ &= \frac{\Pi_1^2 \Pi_2}{(\Pi_3 + 1/2)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

De la même façon, à partir de l'équation (4.11), on trouve :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{F}{(P + kG_{\ell t}S)} \\ &= \frac{F}{P(1 + kG_{\ell t}S/P)} \\ &= \frac{F}{P(1 + 2kG_{\ell t}\pi R/(p\pi R^2))} \\ &= \frac{\Pi_2}{2(1 + 2k\Pi_4)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.3.3 Étude numérique de structures gonflables en deux dimensions à différentes échelles

Cas de la poutre biappuyée avec une charge ponctuelle

Le théorème de Vashy-Buckingham est appliqué en considérant les grandeurs physiques définissant les équations d'équilibre avant l'apparition du pli. Le but recherché est la démonstration que le comportement de la poutre au delà du pli dépend uniquement de ces mêmes grandeurs, auquel cas les résultats obtenus en appliquant strictement le théorème de Vashy-Buckingham seront les mêmes. Les simulations sont réalisées pour trois échelles : $n_1 = 1$, $n_2 = 1/5$ et $n_3 = 1/10$. Le même matériau est conservé entre chaque simulation. L'élément fini de poutre gonflable avec prise en compte du pli est utilisé (*cf* chapitre 2).

Tab. 4.1 – Données utilisées pour la simulation d'une poutre gonflable à trois échelles différentes.

n	L (m)	R (m)	p (bar)	$E_\ell H$ (N/m)	$G_{\ell t} H$ (N/m)
1	10	0,5	0.2	$2,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^3$
1/5	2	0,1	1	$2,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^3$
1/10	1	0.05	2	$2,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^3$

Les résultats présentés sur la figure 4.15 montrent que les nombres sans dimension Π_1 , Π_2 , Π_3 et Π_4 suffisent à l'élaboration de poutres gonflables à échelle réduite. L'écart observé entre les cas n_2 et n_3 par rapport à n_1 après l'apparition du pli vient de la différence de finesse du maillage (11 éléments sur n_2 et n_3 , 50 sur n_1). Les résultats obtenus à 100% de la ruine ne sont pas significatifs car la matrice de rigidité est

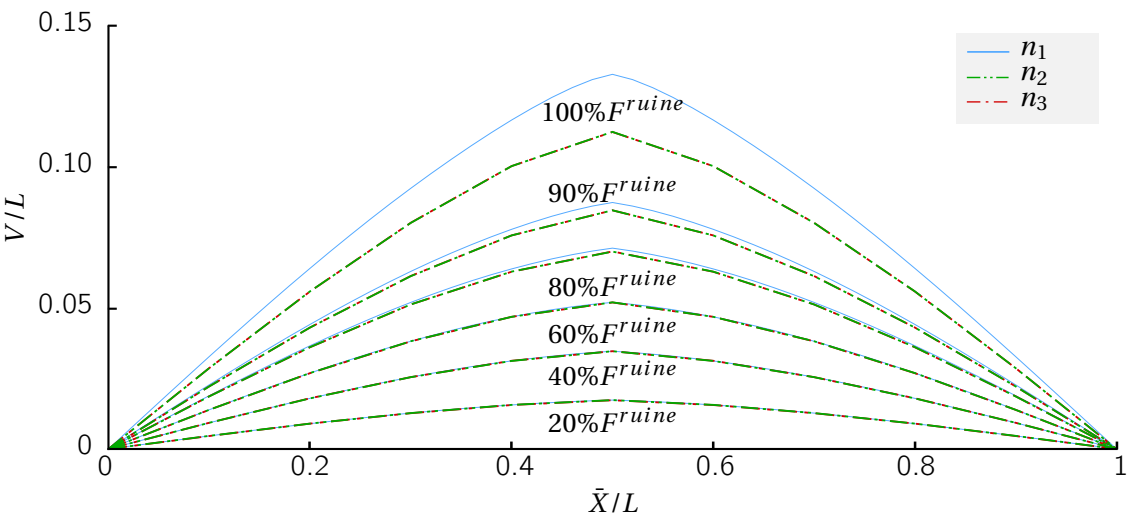


Fig. 4.15 – Comparaison des flèches calculées numériquement pour trois poutres de différentes tailles présentant les mêmes nombres sans dimensions avant et après l'apparition du pli.

singulière.

Les calculs effectués jusqu'à présent ne considèrent que des aspects statiques. Dans l'optique des essais en soufflerie, dans lesquels des effets dynamiques interviennent, l'analyse modale est pertinente. La conservation du même matériau d'une échelle à l'autre ne permet pas la mise à l'échelle de la masse et les modèles réduits présentent donc des fréquences propres différentes, ces fréquences sont présentées dans le tableau 4.2. L'étude de ces fréquences propres fait apparaître une relation entre les fréquences propres f_i^n et f_i^1 respectivement associées au mode propre i à l'échelle 1 et à l'échelle n ,

$$f_i^n = \frac{1}{n} f_i^1 \tag{4.22}$$

Le tableau 4.2 présente les modes propres calculés à l'aide de l'élément fini poutre gonflable, dont la matrice masse est donnée par [Jia07]. La masse volumique considérée est $\rho_v = 1,25 \text{ kg/m}^3$ dans les trois cas, le matériau étant le même. Le rapport des fréquences obtenues respectent l'équation (4.22).

Tab. 4.2 – Fréquences propres calculées pour les trois premiers modes de flexion à différentes échelles avec l'élément fini poutre gonflable.

Échelle (n=...)	Mode 1 (Hz)	Mode 2 (Hz)	Mode 3 (Hz)
1	4,0	12,9	20,7
1/5	20,2	61,1	107,5
1/10	40,4	122,3	213,1

Cas d'une arche gonflable soumise à un vent latéral

Les applications en ingénierie ne se limitent pas à de simples poutres mais s'étendent à des structures plus compliquées. Le développement de l'élément fini poutre et l'identification des nombres sans dimension rendent possible l'étude d'arches gonflables utilisées régulièrement lors d'événements ponctuels tels des marathons ou des courses cyclistes dont la figure 4.16 est un exemple. De la même façon que pour la poutre gonflable, l'objectif est de savoir si la seule utilisation des nombres sans dimensions Π_1 , Π_2 , Π_3 et Π_4 permet

la réduction de l'échelle.



Fig. 4.16 – Exemple d'arche gonflable assurant la signalisation kilométrique sur le Tour de France.

Tout comme pour la poutre, le bâtiment est réalisé à trois échelles détaillées dans le tableau 4.3 en conservant le même matériau. Les dimensions du modèle de référence correspondent aux dimensions de l'arche proposée en exemple sur la figure 4.16. La pression de gonflage et les propriétés du matériau ne sont pas communiquées. Les pressions sont choisies dans le même ordre de grandeurs que celles généralement appliquées sur ce type de structure et le matériau utilisé pour l'étude numérique d'une poutre gonflable est conservé sur ce nouvel exemple.

Tab. 4.3 – Caractéristiques géométriques et matérielles d'une arche gonflable étudiée à trois échelles par l'élément fini poutre gonflable.

n	$D/2$ (m)	R (m)	p (bar)	$E_{\ell}H$ (N/m)	$G_{\ell t}H$ (N/m)
1	3	0,5	0.02	$2,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^3$
1/5	0.6	0,1	0.1	$2,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^3$
1/10	0.3	0.05	0.2	$2,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^3$

L'arche est soumise à un chargement représentant un vent latéral dont la répartition est donnée par Plaut *et al.* [PGKH00],

$$C_p(\phi) = \frac{p(\phi)}{p_{vent}} = -0.2580 + 0.488\cos(\phi) + 0.476\cos(2\phi) + 0.328\cos(3\phi) + 0.1\cos(4\phi) \quad (4.23)$$

Le chargement est donc contrôlé uniquement par la pression du vent (et donc par sa vitesse). Le passage de l'échelle 1 à l'échelle n engendre l'application d'une pression due au vent $1/n$ fois supérieure. La relation entre la vitesse de vent et sa pression est donnée par l'équation de la pression dynamique :

$$p_{vent} = \frac{\rho}{2} v^2 \quad (4.24)$$

Cette relation indique la variation de vitesse à considérer pour le changement d'échelle à fluide constant :

$$v^n = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)} v^1 \quad (4.25)$$

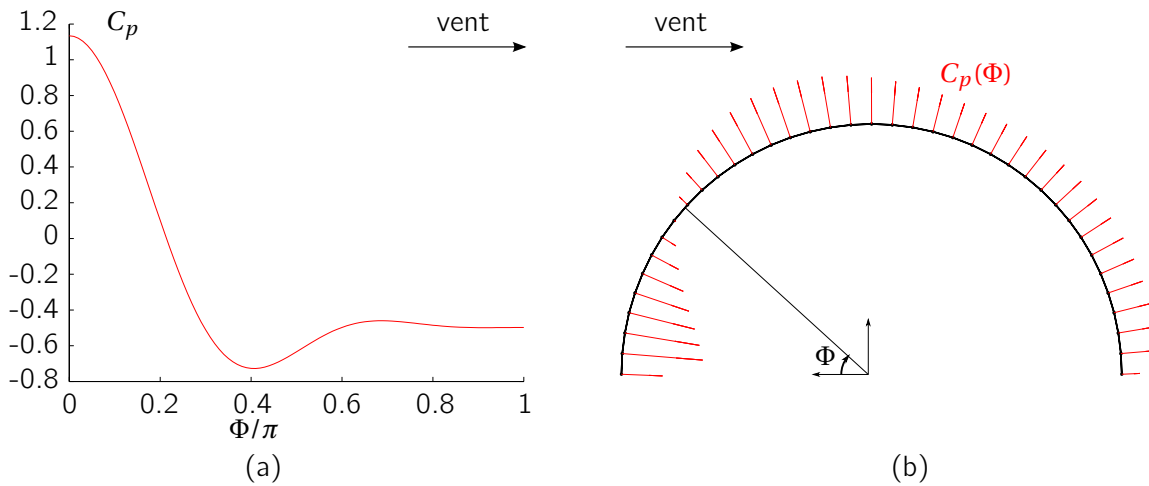


Fig. 4.17 – Répartition de la pression due à un vent latéral (a) et représentation sur l’arche gonflable (b) [PGKH00].

La simulation numérique à plusieurs vitesses de vent permet d’estimer la vitesse du vent pour laquelle le pli puis la ruine interviennent par l’analyse du moment de flexion par lors du calcul avec l’élément fini poutre gonflable. L’analyse du moment de flexion, sur la figure 4.19, révèle que le pli apparaît pour un vent de $v^{pli} = 22.75 \text{ m/s}$ et la ruine pour un vent $v^{ruine} = 28,48 \text{ m/s}$. Les déformées de l’arche pour ces deux niveaux de chargement sont présentés sur la figure 4.19.

Le rapport v_{ruine}/v_{pli} est égal à $\sqrt{(\pi/2)}$, ce qui est cohérent avec le rapport $F^{ruine}/F^{pli} = \pi/2$ obtenu pour une poutre en considérant l’équation (4.24).

Les résultats du calcul sur les trois géométries pour deux vitesses de vent sont présentés sous forme de déformée sur la figure 4.18. Ils montrent qu’une géométrie plus complexe (mais modélisable par une poutre) peut être étudiée à différentes échelles uniquement par la conservation des nombres sans dimensions Π_1 , Π_2 , Π_3 et Π_4 . Il est cependant à noter que l’aspect fluide du vent n’est pas considéré et que la nature de l’écoulement n’est pas forcément la même d’une échelle à l’autre. Seule la partie structure est prise en compte. Par ailleurs le chargement appliqué est le même quelle que soit la vitesse du vent, or en grands déplacements cette distribution varie avec la géométrie de la structure.

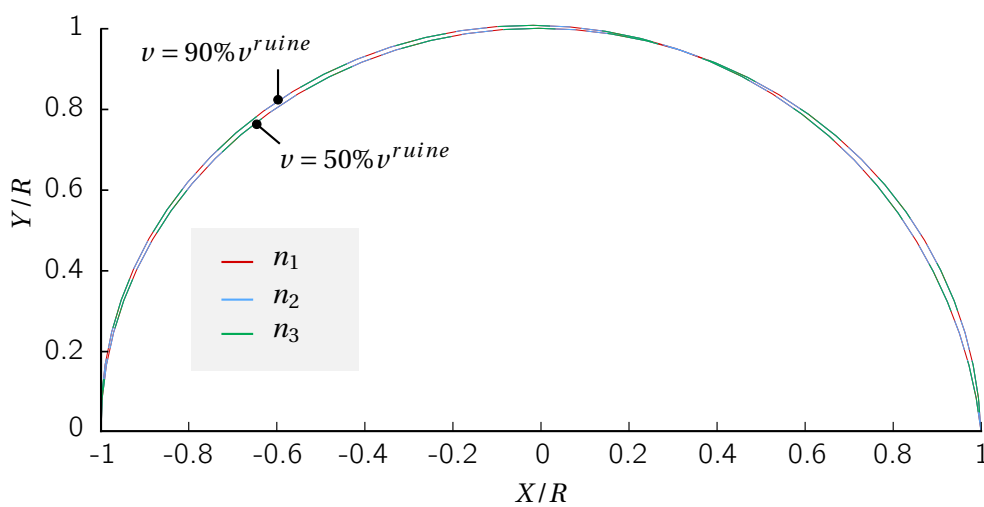


Fig. 4.18 – Déformées de l’arche gonflable de référence à trois échelles pour deux niveaux de chargements.

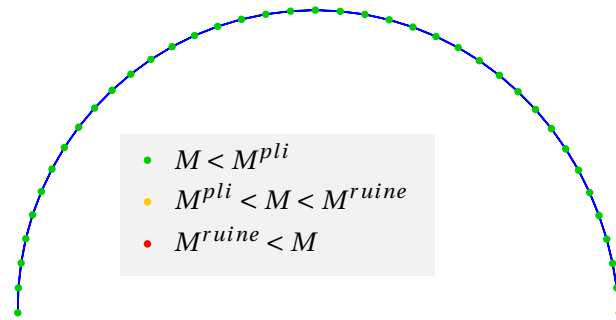
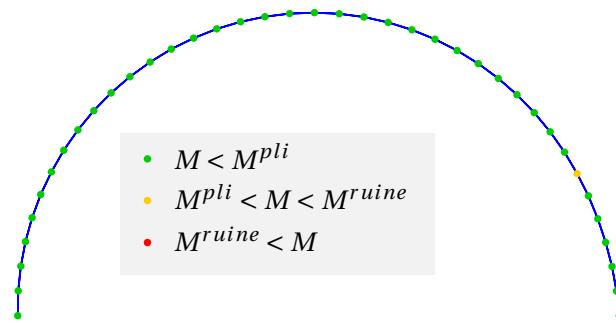
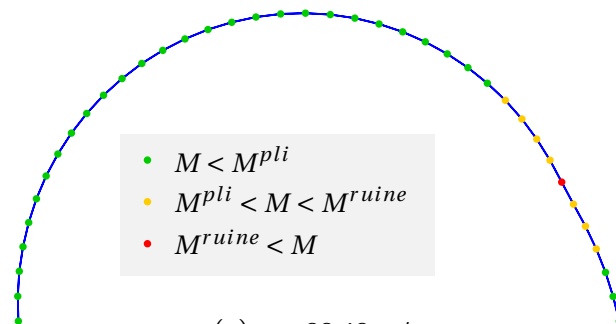
(a) $v = 20 \text{ m/s}$ (b) $v = 22,75 \text{ m/s}$ (c) $v = 28.48 \text{ m/s}$

Fig. 4.19 – Visualisation du moment de flexion dans l'arche et déformée (a) avant le pli, (b) à l'apparition du pli et (c) à la ruine.

4.4 Étude expérimentale d’un bâtiment gonflable à différentes échelles

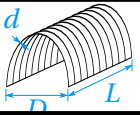
4.4.1 Objectif et présentation de l’essai

Les prospections numériques effectuées jusque là laissent à penser que la réalisation de modèles réduits est possible pour les structures gonflables. Seulement, les cas traités numériquement sont idéalisés : les groupes sans dimensions sont manipulés en respectant rigoureusement le théorème de Vashy-Buckingham. Cependant la réalité ne permet pas une aussi grande souplesse. Tous les matériaux n’existent pas et les rapports entre le module de cisaillement et de Young est rarement constant d’un matériau à l’autre. Par ailleurs la construction de modèles réduits est limitée par les technologies de fabrication actuelles. De plus le calcul numérique considère des liaisons parfaites et aucune interaction au niveau des coutures ou des soudures. Ce nouvel essai est conçu dans le but d’étudier le comportement d’une même structure réalisée à différentes échelles afin de vérifier si la stricte application de la théorie des similitudes (en négligeant les effets de l’épaisseur du tissu) suffit ou s’il est nécessaire de développer des modèles expérimentaux plus complets avant d’être en mesure d’extrapoler le comportement d’une structure à échelle réduite sur la structure à taille réelle. Le bâtiment choisi est une arche gonflable présenté sur la figure 4.20 à 3 échelles différentes. Le bâtiment présente une géométrie permettant sa modélisation en 2 dimensions avec l’élément fini poutre gonflable.



Fig. 4.20 – Présentation du bâtiment gonflable réalisé à 3 échelles différentes $n = 1$, $n = 1/3$ et $n = 1/9$ fabriquées en tissu Ferrari F302.

Tab. 4.4 – Dimensions des modèles réduits.

	Modèle	Arches	$D(m)$	$L(m)$	$d(m)$	D_{SG1}/D	L_{SG1}/L	d_{SG1}/d
	SG1	10	5,30	3,40	0.34	1.0	1.0	1.0
	SG2	10	1,80	1,13	0.11	2.9	3.0	3.1
	SG3	10	0,60	0,44	0.04	8.8	7.7	8.5

4.4.2 Réalisation des maquettes

Géométrie, dimensions, matériaux et fabrication

La réalisation de modèles réduits se doit de respecter les règles de similitudes issues de l'application du théorème de Vashy-Buckingham et ne peut pas être effectuée de manière anodine. Pour la réalisation d'un modèle réduit à l'échelle $1/n$:

- Les longueurs sont divisées par n ;
- la pression de gonflage est multipliée par n ;
- la vitesse du vent est multipliée par $\sqrt{n}$.

Le bâtiment est constitué de 10 arches assemblées les unes à la suite des autres. Le choix est fait de créer une maquette de référence qui constituera l'échelle 1 et deux maquettes à l'échelle 1/3 et 1/9 dont les dimensions sont rappelées dans le tableau 4.4.

La taille de la plus petite des maquette rend impossible l'utilisation de la soudure haute-fréquence. La couture est utilisée pour lier les différentes pièces. Contrairement à la soudure, la couture implique des phénomènes locaux plus importants (interaction du fil et du tissu, création de concentration de contrainte). Les deux autres maquettes sont également cousues pour rester cohérent. Les limites techniques de la fabrication de maquettes apparaissent sur le plus petit des modèles. Il est difficile de respecter parfaitement les dimensions voulues. Par ailleurs, l'épaisseur de tissu doit idéalement être mise à l'échelle ce qui n'est pas envisageable en conservant le même tissu. Cette incompatibilité ne constitue pas un obstacle car l'épaisseur du tissu est négligeable devant les autres dimensions.

Les tissus F302 de la gamme précontraint Ferrari et le Terraza 550884 sont sélectionnés pour réaliser les maquettes. Le choix du F302 est motivé par la connaissance des modules mécaniques et le Terraza présente une grande souplesse et est plus facilement manipulable permettant la réalisation de maquettes plus petites. Finalement, les 5 maquettes représentées sur la figure 4.21 sont réalisées et nommées en suivant la nomenclature suivante : $SG1 - F$ ou $SG1$ indique la taille de la maquette et F le tissu Ferrari (T est la notation adoptée pour le tissu Terraza).

Mise sous pression et étanchéité des maquettes

La technologie de fabrication (couture) présente l'inconvénient de ne pas assurer l'étanchéité des structures contrairement à la soudure haute fréquence. La montée en pression est donc limitée par le débit de fuite. La pression de gonflage de SG1 est mesurée afin d'identifier les pressions de gonflage nécessaires pour SG2 et SG3 dans le cadre des similitudes. Le souffleur assure une pressurisation de SG1 à $p_1 = 0,0138$ bar. Cela implique d'appliquer une pression de 0,0414 bar dans SG2 et de 0,1242 bar dans SG3. Ces pressions ne peuvent pas être atteintes en l'état devant l'importance des fuites et plus particulièrement sur SG3. Il faut réfléchir à une procédure de limitation des fuites sur les modèles réduits. La solution doit satisfaire plusieurs critères :

- ne pas endommager la structure ;
- ne pas changer la rigidité de la structure ;
- ne pas alourdir de la structure ;
- réalisable facilement.



Fig. 4.21 – Panorama des maquettes fabriquées pour la recherche de similitudes par un essai en soufflerie.

Le domaine nautique apporte une solution simple à cette problématique. Des liquides d'étanchéité sont commercialisés pour assurer l'entretien de bateaux gonflables semi-rigides et l'étanchéité de l'embarcation. Ces produits s'injectent à l'intérieur de la structure et viennent appliquer, en séchant, un film mince recouvrant les fuites mineures. Cette technique est adaptée pour les coutures qui sont en réalité une succession de micro-fuites. Le liquide utilisé est destiné à être appliqué sur des surfaces en PVC. Les maquettes sont traitées en injectant du liquide dans chacune des 10 arches constitutives par l'intermédiaire d'une seringue, la maquette est secouée aléatoirement dans toutes les directions pour répartir le liquide sur toutes les surfaces. Le temps de séchage est de 3 à 4 jours : la maquette est maintenue à faible pression durant cette période afin que les parois ne se collent pas entre-elles. Une fois le traitement appliqué, il reste quelques fuites mineures mais les maquettes supportent les pressions requises.

L'étanchéité peut être améliorée par l'ajout de talc à l'intérieur de la structure. Cette étape n'est pas réalisée afin de ne pas apporter une surrigidité aux maquettes en créant une surépaisseur sur la surface du tissu.

4.4.3 Montage expérimental

Réalisation des ancrages

La réalisation des ancrages d'un bâtiment gonflable est difficile. L'obtention de conditions limites d'encastrement est compliquée. La solution retenue doit permettre le maintien de la structure sans l'endommager. Pour réaliser cet ancrage des boucles de fixation sont ajoutées à plusieurs emplacements sur la base des maquettes. Ces boucles sont maintenues au niveau du support par le positionnement d'une vis et d'une rondelle comme la figure 4.23 le montre. Cette première installation est réalisée sur la maquette dégonflée. La mise sous pression maintient ensuite la base en place, le phénomène est schématisé sur la figure 4.22. Ces ancrages peuvent être modélisés par des rotules

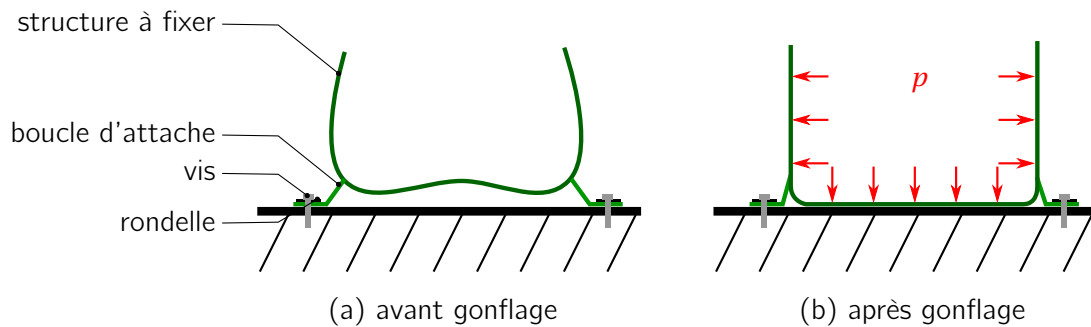


Fig. 4.22 – Schématisation du principe de réalisation des liaisons à la base du bâtiment gonflable : (a) fixation des boucles d'attaches puis (b) maintien en place par la mise sous pression.



Fig. 4.23 – Visualisation d'un point de fixation sur la maquette SG1-F.

Installation des maquettes dans la veine haute-vitesse

L'installation des maquettes dans la veine haute-vitesse s'effectue de deux façons : La structure de taille SG1 est fixée selon la méthode décrite ci-dessus sur un cadre composé de bastaings, photographié sur la figure 4.24(a). Ce cadre est positionné au centre de la veine sur un plateau tournant permettant ainsi la représentation de plusieurs direction de vent. Les maquettes de taille SG2 et SG3, plus petites, sont davantage sensibles à l'action de la couche limite de la soufflerie (dont l'ordre de grandeur est 15 cm). Ces dernières sont installées sur une table en acier de hauteur $h = 1,20 \text{ m}$ recouverte d'un plateau de bois sur lequel sont réalisés les ancrages. La table est ensuite positionnée au centre de la veine, sur le plateau tournant. L'installation est photographiée sur la figure 4.24(b).

Méthodes de mesure et appareillage

Au cours des mesures, la pression de gonflage est ajustée avec une précision d'affichage de 0.0004 bar. Les déplacements de la structure sont relevés par deux systèmes différents, la mesure de pression est réalisée par le capteur P8AP et la centrale d'acquisition Spider 8 par l'interface Catman. Le Qualisys Motion Capture System (trajectographie), abrégé MCS, permet de suivre le déplacement de points particuliers marqués à l'aide de cibles réfléchissant les infrarouges. Cette mesure se limite donc aux seuls points repérés et la VIC pour laquelle une simple photo de la déformée permet de mesurer le champ de déplacement global. Pour finir, les capteurs de pression développés précédemment sont placés à la surface de certaines structures pour obtenir la répartition du champ de pression. Les installations, synthétisées sur la figure 4.25 comprennent finalement six caméras infrarouges pour la trajectographie, une caméra pour l'application de la VIC et cinq postes de contrôle.

La mesure du déplacement nécessite une préparation préalable de la structure : des cibles réfléchissantes circulaires de diamètre égal à 2 cm sont collées régulièrement sur la surface extérieure du bâtiment. La ligne



(a) Fixation de la maquette de taille SG1 sur son cadre



(b) Fixation d'une maquette de taille SG2 sur une table au centre de la veine

Fig. 4.24 – Installation des maquettes dans la veine haute-vitesse : (a) sur un cadre pour la maquette de taille SG1 et (b) sur une table pour les maquettes de taille SG2 et SG3.

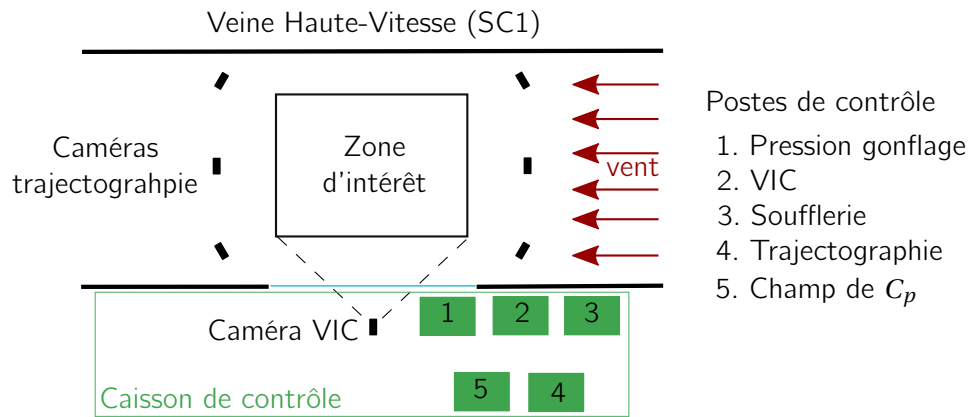


Fig. 4.25 – Équipement de la veine haute-vitesse (SC1) pour les essais.

neutre de la face visible du bâtiment est tracée à l'aide d'un marqueur et d'un compas pour s'assurer que la forme de l'état initial soit un cercle. Les deux méthodes de mesures sont finalement complémentaires : la trajectographie est une mesure ponctuelle en 3D tandis que la VIC est une mesure de champ en 2D.

Tab. 4.5 – Liste et caractéristiques des mesures réalisées sur les maquettes.

Nom	Modèle	Tissu	p (bar)	Commentaires
SG3-F1	SG3	Ferrari F302	0.124	Relevé du champ de pression externe
SG3-F2	SG3	Ferrari F302	0.124	
SG3-F3	SG3	Ferrari F302	0.113	
SG3-T1	SG3	Terraza 550884	0.060	Relevé du champ de pression externe
SG3-T2	SG3	Terraza 550884	0.040	
SG3-T3	SG3	Terraza 550884	0.020	
SG2-F1	SG2	Ferrari F302	0.040	Relevé du champ de pression externe
SG2-F2	SG2	Ferrari F302	0.030	
SG2-T1	SG2	Terraza 550884	0.025	Mesure par VIC difficile (manque de recul)
SG2-T2	SG2	Terraza 550884	0.020	
SG2-T2	SG2	Terraza 550884	0.015	
SG2-T3	SG2	Terraza 550884	0.010	
SG1-F1	SG1	Ferrari F302	0.014	

Le protocole expérimental suivi pour la réalisation des mesures (tab. 4.5) se décompose de la manière suivante :

- Réglage de l'orientation des pales des ventilateurs pour générer la vitesse d'étude ;
- Attente de la stabilisation de la valeur mesurée de la vitesse ;
- Contrôle de la pression de gonflage ;
- Lancement des acquisitions Qualisys pour la mesure du déplacement et de la sonde PSI pour le relevé du champ de pression sur une période de 30 à 60s. Prises de vues pour la mesure du déplacement par la VIC.

4.4.4 Remarques générales et aspects techniques sur le déroulement des essais

L'essai se déroule sur deux semaines. Les systèmes de mesure sont conservés en l'état sur une même semaine. Sur une même semaine d'essais, les paramètres de la caméra dédiée à la VIC sont conservés. La position des caméras infrarouges pour le système MCS est conservée. Cependant le logiciel d'acquisition recommande une calibration toutes les 6 heures pour un fonctionnement optimal. Ce changement de calibration explique une éventuelle modification des coordonnées d'une mesure à l'autre. La calibration est effectuée lors d'un changement de maquette. L'état initial est mesuré après chaque calibration pour que les résultats puissent être comparés d'une maquettes à l'autre. Quelques difficultés techniques sont relevées lors des essais :

- La mise sous pression de la structure SG3-T est difficile. Le volume de fuite est important. L'efficacité du liquide d'étanchéité est limité car l'enduction n'est pas constituée de PVC mais de Polyurethane (PU). L'étanchéité est corrigée par l'application de silicone sur les coutures (fig. 4.26). L'application de la colle ajoute une masse non négligeable sur la paroi de la structure.
- Le déplacement de la plus petite des maquettes est très faible et d'ordre de grandeur inférieur à la précision du système MCS (de l'ordre du millimètre). De plus, la petite taille de la structure fait que les cibles sont rapprochées et se confondent. La VIC est préférée sur ces maquettes.
- La configuration de la soufflerie ne permet pas d'avoir suffisamment de recul pour l'exploitation des résultats de SG1-F par VIC. Le système MCS est préféré dans ce cas.

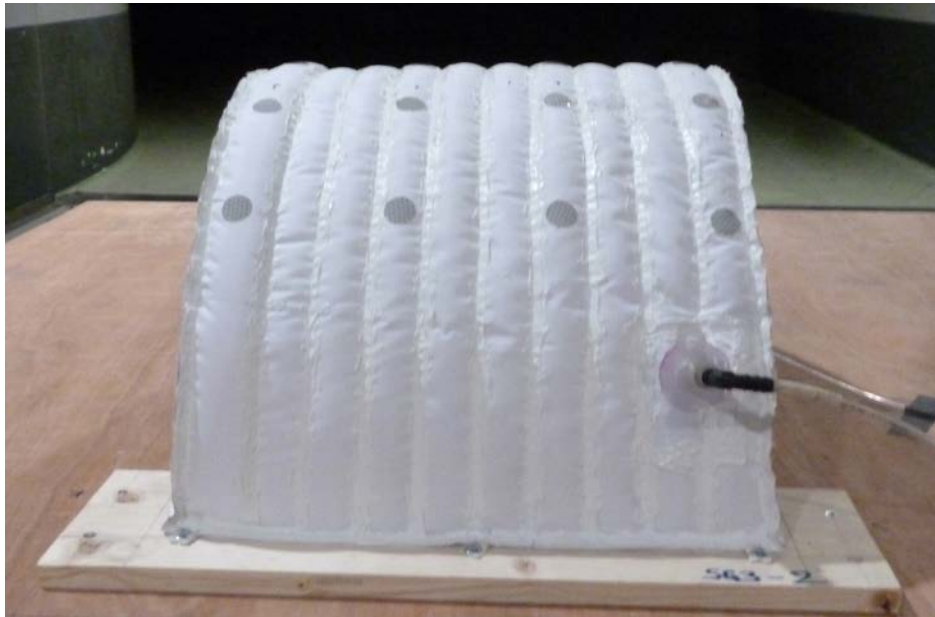


Fig. 4.26 – Application de silicone sur les coutures de la structure SG3-T pour réduire les fuites d'air.

4.4.5 Identification expérimentale des charges de plissage et de ruine

Une première étude est menée sur les maquettes pour identifier la charge de pli et la charge de ruine des bâtiments gonflables. La figure 4.27 présente les états successifs de la structure SG1-F1. Le pli apparaît à 15 m/s et la ruine à 20 m/s. Le rapport entre la vitesse de vent provoquant le pli et celle provoquant la ruine est proche de la valeur théorique de $\sqrt{\pi/2}$. La courbe vitesse du vent-déplacement axial d'un point situé à proximité du sommet du bâtiment est tracée sur la figure 4.28 en exploitant les résultats du système

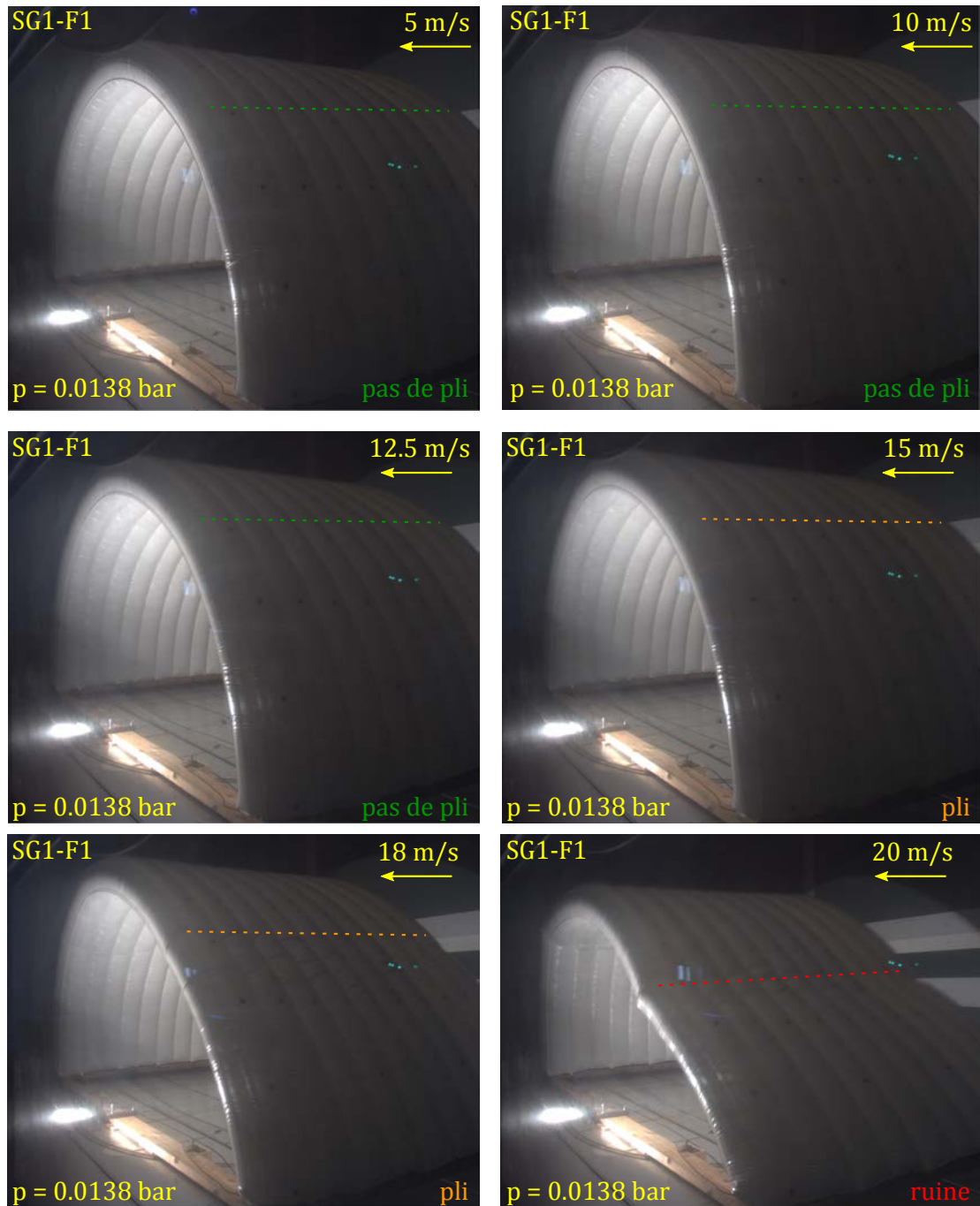


Fig. 4.27 – Évolution de l'état de la structure SG1-F au cours du chargement, recherche de la charge de plissage et de la charge de ruine.

MCS. Cette courbe est tracée en prenant la valeur moyenne observée pour le déplacement axial U sur l'intervalle de mesure. Bien que la charge de pli soit difficile à identifier sur cette courbe, la charge de ruine est évidente. Le déplacement axial U augmente de 130 à 322 mm pour une augmentation de la vitesse de 18 à 20 m/s, la tangente est alors proche de zéro : la ruine est atteinte. On modélise en trait discontinu la partie linéaire du comportement. On remarque que cette modélisation ne passe pas par l'origine du repère. Ce phénomène traduit la présence d'une phase de « mise en place de la structure » avant le début de la flexion.

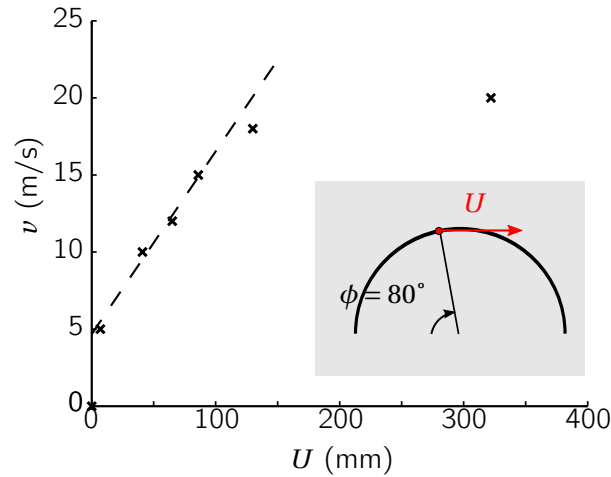


Fig. 4.28 – Courbe vitesse de vent-déplacement axial tracée en $\phi = 80^\circ$ pour la structure SG1-F1.

En appliquant les rapports d'échelles, les charges de pli et de ruine sur les maquettes SG2-F1 et SG3-F1 peuvent être estimées à partir des résultats expérimentaux sur SG1-F1 : le pli est provoqué par une vitesse de vent de 26 m/s sur SG2-F1 et de 45 m/s sur SG3-F1 et la ruine par une vitesse de 35 m/s sur SG2-F1 et 60 m/s sur SG3-F1. Les vitesses de vent nécessaires pour SG3-F sont très élevées et ne sont pas atteintes mais l'état de la structure à $v = 45$ m/s, sur la figure 4.29, confirme que le pli n'apparaît pas avant la vitesse d'amorce estimée à $v = 45$ m/s. Les résultats obtenus sur SG2-F1, sur la figure 4.30, montrent que les vitesses d'amorce du pli et de la ruine sont très proches de celles attendues : les valeurs sont relevées par inspection visuelle depuis le caisson de contrôle, la ruine est atteinte lorsque le pli atteint visuellement le moitié de la section.

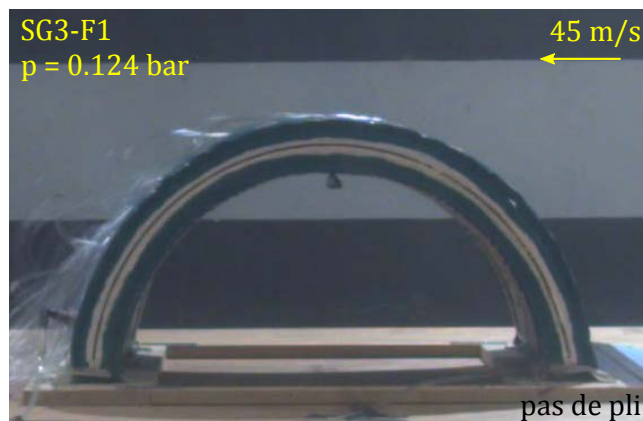


Fig. 4.29 – État de la structure SG3-F à $v = 45$ m/s, absence de pli.

Ces valeurs sont confirmées par l'analyse des courbes force-déplacement issues de l'exploitation des résultats du système MCS. Ces dernières sont tracées pour SG2-F1 et SG3-F1 sur la figure 4.31. Le déplacement axial U est une valeur moyenne du déplacement axial mesuré sur la durée de l'acquisition. La

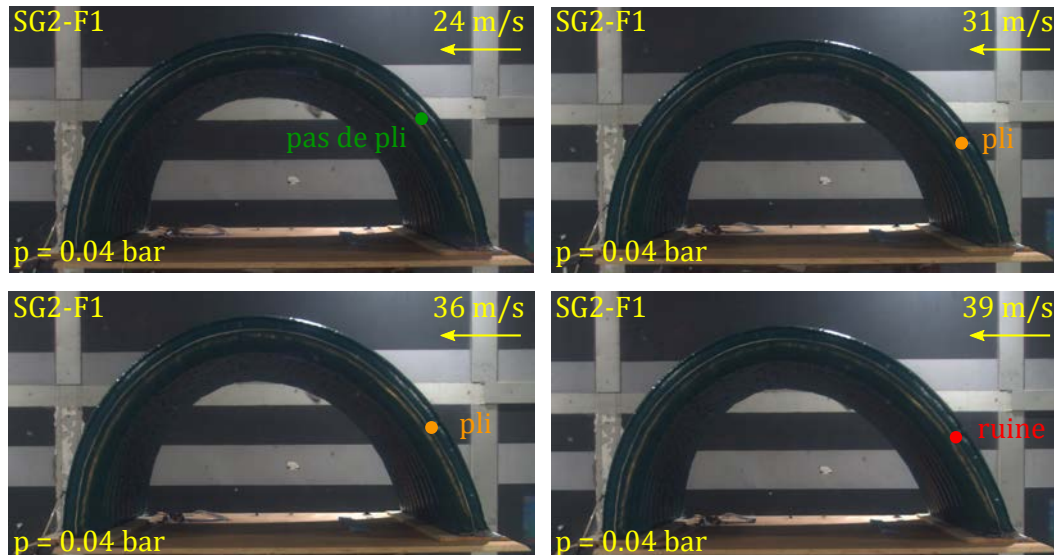


Fig. 4.30 – Évolution de l'état de la structure SG2-F au cours du chargement, recherche de la charge de plissage et de la charge de ruine.

la courbe correspondant à SG2-F1 est exploitable pour la charge de pli comme pour la charge de ruine : une première partie linéaire, modélisée par la ligne en tirets, est observée pour des vitesses de vent allant de 10 à 25 m/s et correspond au comportement pré-plissage. L'analyse de la courbe confirme l'estimation effectuée par contrôle visuel sur les images. La ruine correspond à un plateau, qui apparaît à 40 m/s sur la courbe force-déplacement. La courbe force-déplacement de SG3-F1 présente deux parties linéaires, de 0 à 20 m/s puis de 20 à 40 m/s. Le déplacement mesuré sur la première partie est très faible et inférieur à la précision du système de mesure (donnée par le constructeur à 1 mm). Cette première partie n'est donc pas significative et correspond à une mise en place du montage. La seconde partie indique que le pli n'apparaît pas, la courbe restant linéaire.

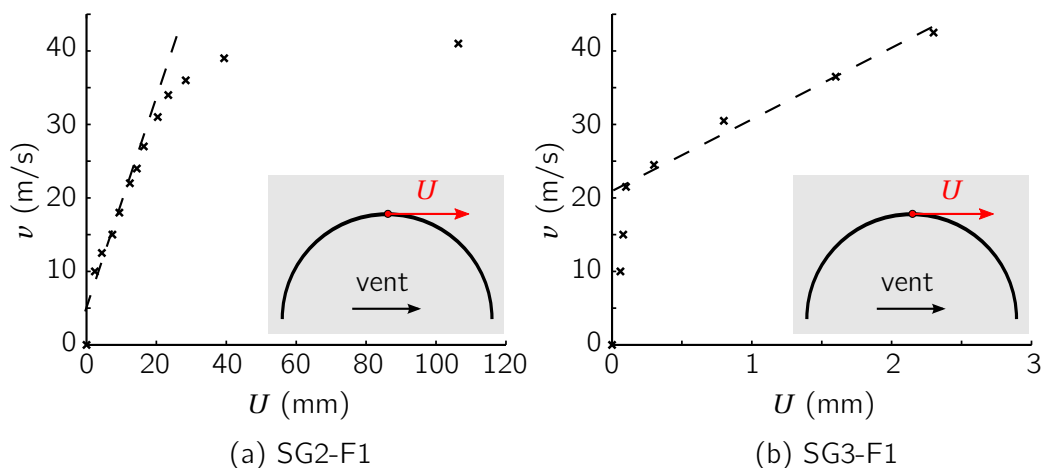


Fig. 4.31 – Courbes vitesse de vent-déplacement axial tracées en $\phi = 90^\circ$ pour les structures SG2-F1 (a) et SG3-F1 (b).

Influence de la pression de gonflage sur les charges de pli et de ruine

L'influence de la pression sur les charges de pli et de ruine est mise en évidence sur la figure 4.32. Les déplacements mesurés sur SG3-F par le système MCS sont trop faibles pour donner un résultat significatif, on s'intéresse aux résultats obtenus pour SG2-F1 ($p_1=0,04$ bar) et SG2-F2 ($p_2=0,03$ bar). La figure 4.33

présente les courbes force-déplacement obtenues pour les maquettes SG2-T3 ($p_3=0,015$ bar) et SG2-T4 ($p_3=0,010$ bar). Les résultats de SG2-T1 et SG2-T2 ne sont pas exploités en raison de l'instabilité de la pression de gonflage au cours de l'essai (l'instabilité est due au volume trop important de fuite). Les courbes tracées entre chaque point montre la tangente, les dernier points n'apparaissent pas sur la courbe pour faciliter la lecture.

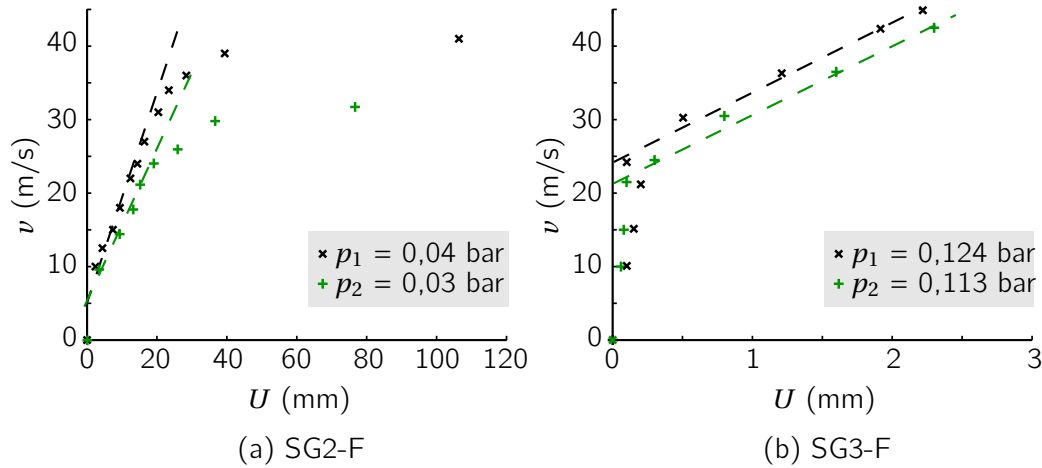


Fig. 4.32 – Influence de la pression de gonflage sur les courbes vitesse de vent-déplacement axial tracées en $\phi = 90^\circ$ pour les structures SG2-F (a) et SG3-F (b).

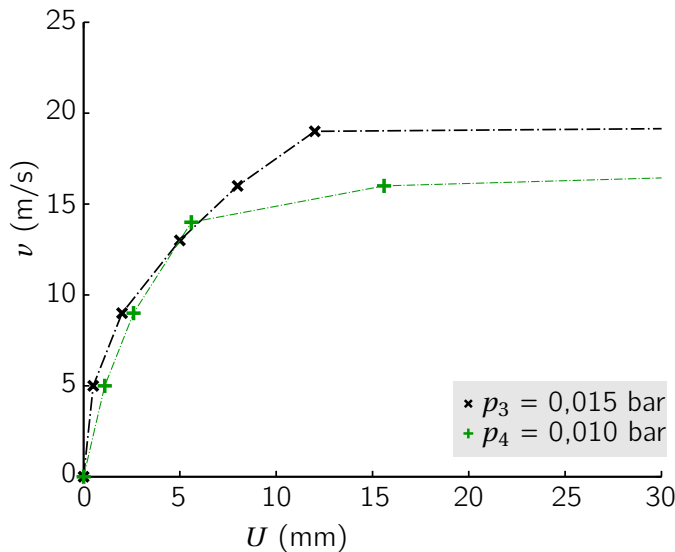


Fig. 4.33 – Influence de la pression de gonflage sur les courbes vitesse de vent-déplacement axial tracées en $\phi = 90^\circ$ pour la structures SG2-T.

Influence du matériau sur les charges de pli et de ruine

Les résultats du chapitre 2 montrent que, théoriquement, dans le cas de la flexion, la valeur des charges de pli et de ruine dépend uniquement de la géométrie (du rayon R de la section) et de la pression de gonflage. On rappelle les expressions de ces deux moments :

$$\begin{aligned} M^{pli} &= \frac{p\pi R^3}{2} \\ M^{ruine} &= \frac{p\pi^2 R^3}{4} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Les géométries de SG2-F1, SG2-F2, SG2-T3 et SG2-T4 étant les mêmes, les résultats doivent être les mêmes que l'on utilise un matériau ou l'autre. On trace les valeurs des vitesses de vent mesurées à la ruine en fonction des pressions de gonflage sur la figure 4.34. Un alignement des points sur la courbe signifie que le matériau n'a pas d'influence sur les charges de pli et de ruine. Le coefficient de régression linéaire obtenu est de 0,997, on peut considérer les points comme alignés. Cependant, cette régression est effectuée avec seulement quatre points, ce qui est peu. Les vitesses de vent à la ruine à $p=0.02$ bar et à $p=0.025$ bar ne peuvent pas être obtenues car la maquette SG2-T ne se maintient à une pression supérieure à 0.015 bar et la maquette SG2-F requiert une pression supérieure à $p=0.025$ bar pour prendre sa forme. Les résultats doivent être interprétés comme une tendance qui reste à confirmer en augmentant le nombre de points de mesure.

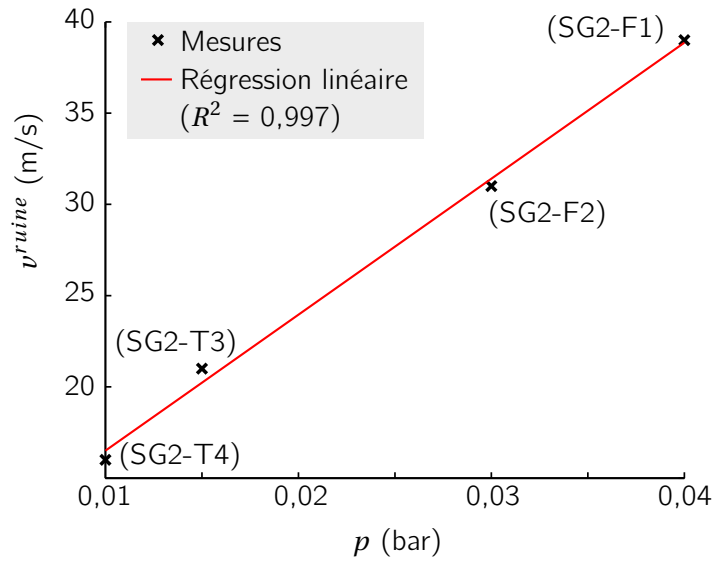


Fig. 4.34 – Indépendance de la charge de ruine vis-à-vis du matériau.

Finalement, cette première étude permet de confirmer le rapport théorique de $\sqrt{\pi/2}$ entre la vitesse de vent faisant apparaître le pli et celle correspondant à la ruine. L'effet d'échelle est également validé sur les charges de pli et de ruine et une première tendance laisse à penser que les charges de pli et de ruine sont indépendantes du matériau même lorsque des efforts de traction interviennent dans le problème.

4.4.6 Mesure du champ de pression

La caractérisation du champ de pression extérieur est importante avant d'envisager l'étude de modèles réduits. Deux verrous scientifiques subsistent pour être en mesure de reproduire le même chargement à une échelle moindre :

- la répartition du champ de pression dépend-elle de la taille de l'objet ?
- La répartition est-elle la même du début à la ruine ?

La méthodologie suivie pour répondre à ces deux questions se base sur l'étude de deux maquettes à deux échelles différentes (SG2 et SG3).

Utilisation des capteurs de pression développés

Les capteurs de pressions fabriqués et présenté au chapitre 3 permettent d'équiper 4 des 10 arches de chacune des maquettes comme la figure 4.35 le montre sur SG3-F. L'espacement entre deux capteurs successifs est détaillé sur la figure 4.36. Il est de 15° sur SG3 et de 10° sur SG2. L'intérêt d'équiper plusieurs

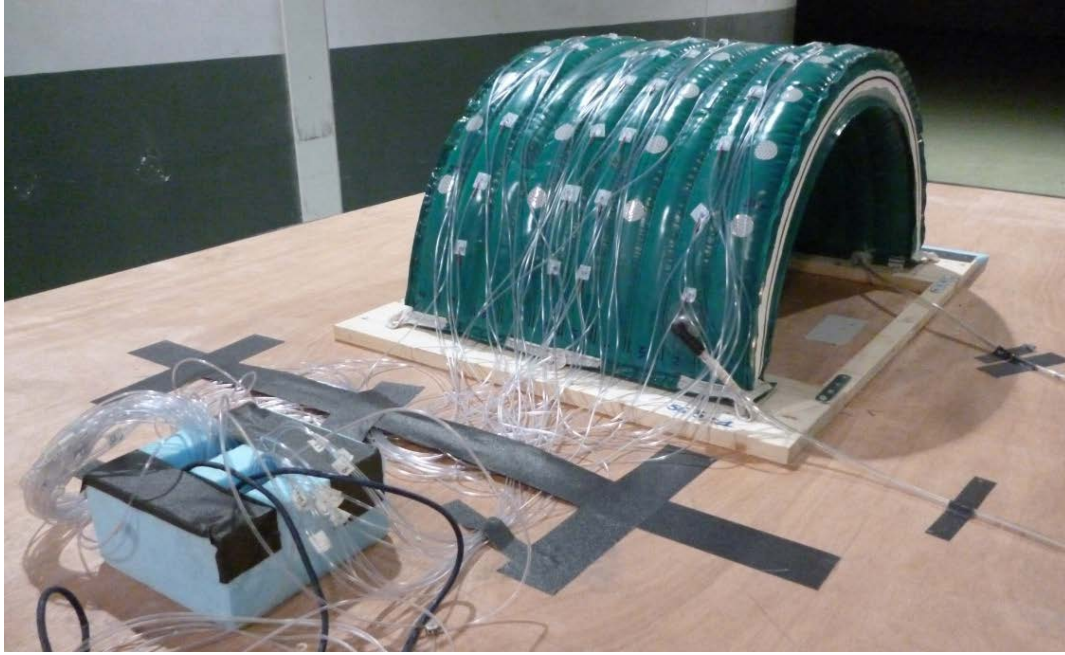


Fig. 4.35 – Équipement de la maquette SG3-F pour le relevé du champ de pression à partir des capteurs développés.

arches est de vérifier l'homogénéité de la pression sur une même ligne. L'homogénéité de la distribution sur une même ligne permet de négliger les effets de bords et des phénomènes de recirculation à l'intérieur du bâtiment.

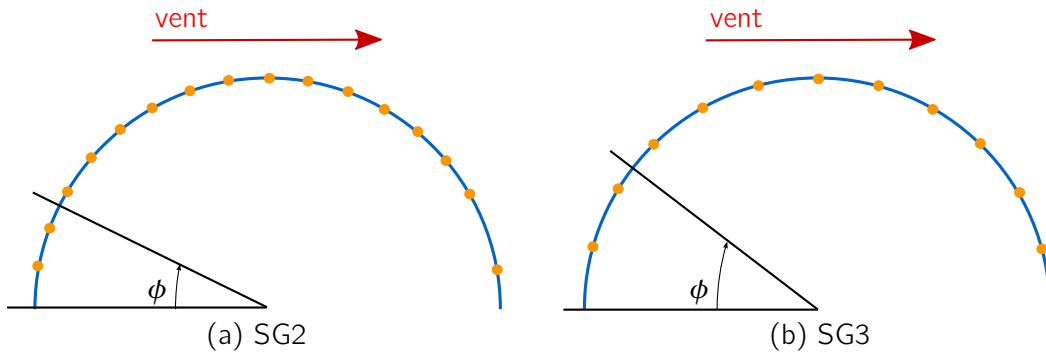
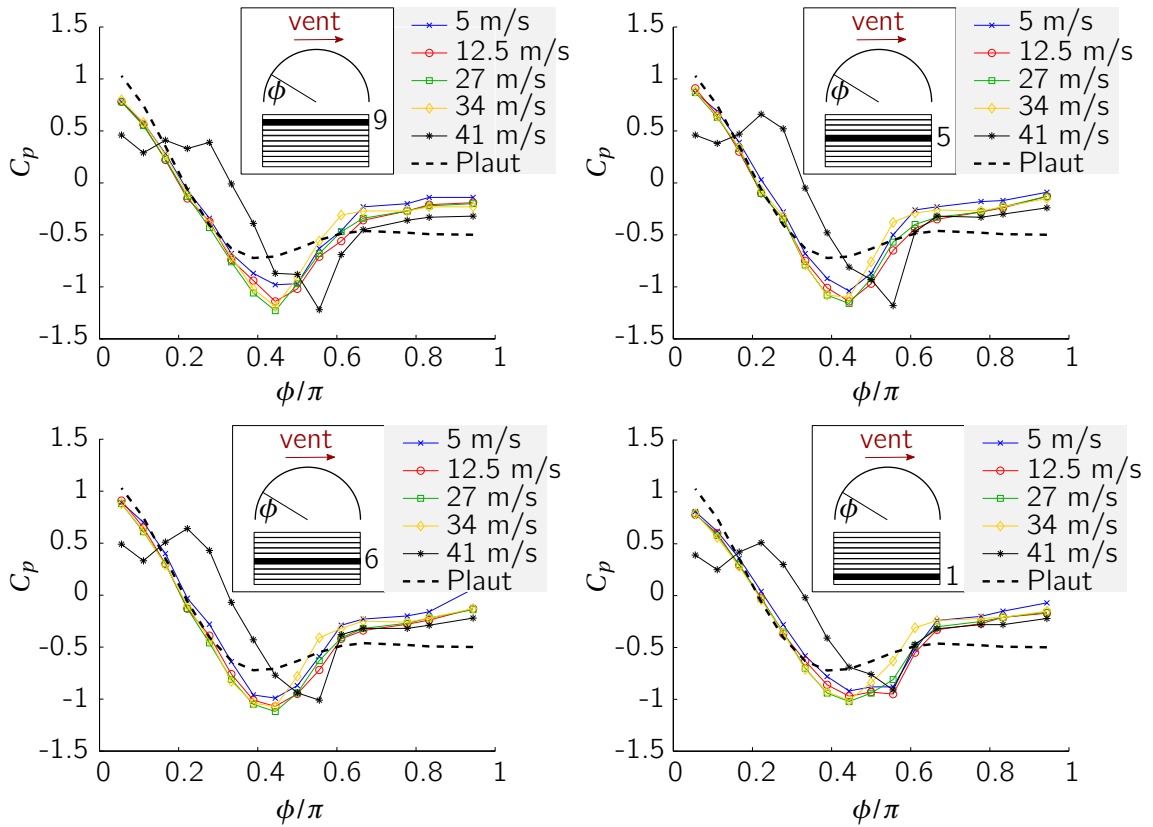


Fig. 4.36 – Répartition des capteurs de pressions sur les maquettes de taille SG2 (a) et SG3 (b) pour la caractérisation du champ de pression extérieur.

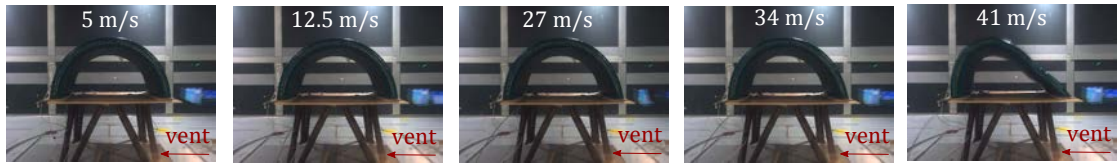
La figure 4.37 présente les coefficients de pression C_p mesurés sur la maquette SG2-F1. Ce coefficient est calculé par le rapport entre la pression mesurée en un point et la pression ambiante. La pression ambiante est obtenue à partir de la vitesse relevée à l'aide d'un tube de Pitot situé au plafond de la soufflerie, au dessus des maquettes. La relation entre la vitesse du vent et sa pression est donnée par l'équation (4.24). Finalement,

$$C_p(\phi) = \frac{2p(\phi)}{\rho v^2} \quad (4.27)$$

L'analyse du champ de pression mesuré sur SG2-F1, tracé sur la figure 4.37, valide l'homogénéité de la distribution de la pression sur une même ligne. Les résultats sur les quatre arches sont les mêmes. Le bâtiment subit une pression sur la face directement exposée au vent (i.e. $0 < \phi < 0,2\pi$) et une dépression pour un angle ϕ compris entre $0,2\pi$ et π . Le décollement apparaît pour un angle $\phi_c \approx 0,2\pi$. La géométrie du bâtiment ne varie que faiblement pour des vents allant de 5m/s à 35m/s (fig. 4.37) justifiant l'allure identique de



(a) Répartition du champ de pression sur 4 arches différentes du bâtiment pour 5 vitesses de vent et comparaison avec la distribution de Plaut *et al.* [PGKH00] sur la maquette SG2-F1.



(b) Changement de la géométrie de la structure SG2-F au cours du chargement

Fig. 4.37 – Champ de pression exercé par le vent sur la maquette SG2-F1 et déformée associée.

la distribution de la pression à ces vitesses. A 41m/s la structure change de géométrie : ce changement s'observe sur la distribution de la pression, qui bien que présentant une allure proche, révèle des différences. Le point de décollement se décale ($\phi_c \approx 0,3\pi$) et l'amplitude sur la partie directement exposée au vent est réduite. Ce résultats est cohérent puisque l'angle d'incidence du vent est moindre sur la déformée. L'arrière du bâtiment, peu déformé, subit les mêmes efforts qu'à vitesse plus faible. La comparaison des données expérimentale avec l'expression proposée par Plaut *et al.* [PGKH00] montre une bonne corrélation sur la partie avant du bâtiment jusqu'à $\phi \approx 0,3\pi$ mais un écart est observé au delà. Cependant la distribution de Plaut est proposée pour une arche en deux dimensions : la dépression est compensée par la fuite du fluide sur les côtés. Ce phénomène n'est pas possible dans le cas présent, la structure étant en trois dimensions.

L'exploitation des résultats de la structure de taille SG2 apporte la réponse à la seconde partie de la problématique : le champ de pression est impacté de manière non négligeable à l'approche de la ruine. La réponse à la première partie est apportée par les résultats sur la structure de taille SG3, présentés sur la figure 4.38. L'allure du champ de pression mesurée pour SG2 se retrouve sur SG3. Le décollement s'opère pour un même angle $\phi_c \approx 0,2\pi$ sur les deux tailles de maquettes. Les amplitudes sont très proches sur le début ($\phi < 0,2\pi$) et la queue de distribution ($\phi > 0,6\pi$) tandis qu'elles s'éloignent davantage sur la partie centrale du bâtiment : l'amplitude relevée sur SG3 ($C_p^{min} \approx -1.3$) est plus importante que l'amplitude mesurée sur SG2 ($C_p^{min} \approx -1.0$). Cette différence s'explique par le comportement de la couche limite. L'épaisseur de cette

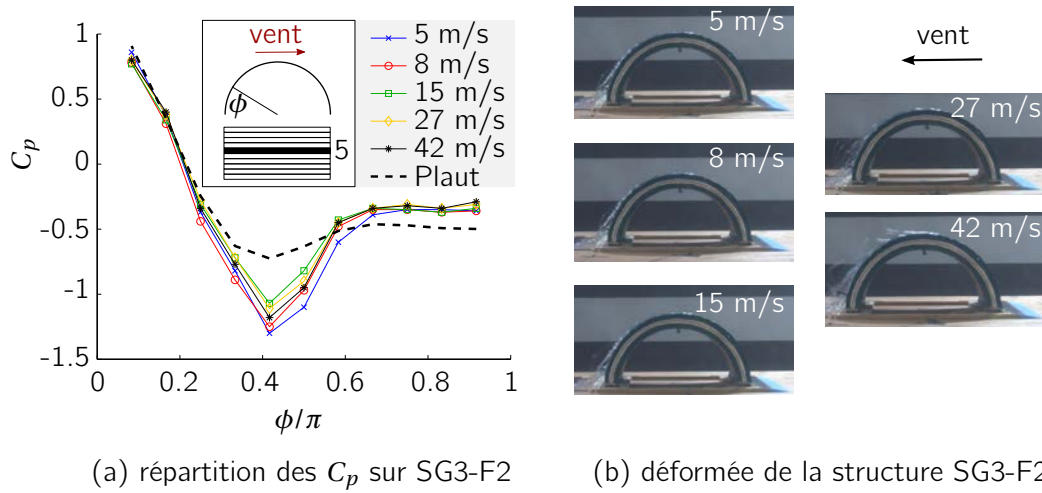


Fig. 4.38 – Répartition du champ de pression sur le bâtiment SG3-F2 pour 5 vitesses de vent, (a) comparaison avec la distribution de Plaut *et al.* [PGKH00] et (b) visualisation de la déformée.

dernière est plus importante devant la taille des capteurs sur SG3 que sur SG2, la situation des capteurs dans la couche limite n'est donc pas la même. La géométrie de SG2 est plus favorable, la surestimation de la pression est plus faible.

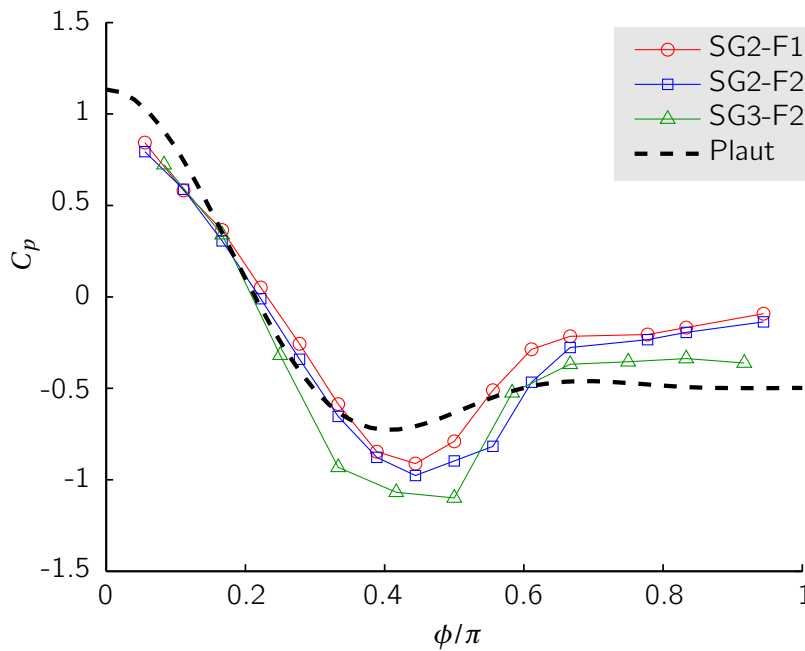


Fig. 4.39 – Comparaison des C_p obtenus sur 3 maquettes différentes : SG2-F1 (bleu), SG2-F2 (rouge) et SG3-F2 (vert) et comparaison avec la distribution de Plaut.

La figure 4.39 montre une comparaison des champs C_p moyens mesurés sur chacune des maquettes testées. Les courbes sont construites en effectuant la moyenne des valeurs relevées sur chaque arche j (où $j = 1$ correspond à l'arche 2, $j = 2$ correspond à l'arche 5, $j = 3$ correspond à l'arche 6, $j = 4$ correspond à l'arche 9) à chaque vitesse v_i d'abord puis en faisant à nouveau la moyenne des profils obtenus pour chaque vitesse v_i (v varie entre $v_1 = 5$ m/s à $v_4 = 34$ m/s pour SG2-F1 et SG2-F2, et $v_1 = 5$ m/s à $v_4 = 27$ m/s pour SG3-F2) :

$$C_p(\phi) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 C_p^j(\phi, v_i) \right) \quad (4.28)$$

Les résultats permettent de conclure que les trois champs sont très proches. La similitude sur le chargement est donc possible. Les courbes présentent une allure similaire à la distribution de Plaut. On propose donc de modéliser les résultats expérimentaux par une seule expression de C_p . La proximité du champ expérimental avec la distribution de Plaut [PGKH00] justifie la forme suivante :

$$C_p(\phi) = a_0 + a_1 \cos \phi + a_2 \cos 2\phi + a_3 \cos 3\phi + a_4 \cos 4\phi \quad (4.29)$$

pour les C_p où les coefficients a_i sont identifiés par minimisation sur les données expérimentales. Cette minimisation s'effectue sur la moyenne de chacune des mesures sur les deux structures avant le changement de géométrie. La fonction à minimiser est alors :

$$g = \sum \phi_j (C_p(a_i) - C_p^{exp})^2 \quad (4.30)$$

La minimisation effectuée par la fonction `fminsearch` de Matlab permet d'obtenir les valeurs des coefficients a_i . La distribution des C_p est obtenue avec un coefficient de régression $R^2 = 0.957$,

$$C_p(\phi) = -0.2387 + 0.2811 \cos \phi + 0.5831 \cos 2\phi + 0.3207 \cos 3\phi - 0.0327 \cos 4\phi \quad (4.31)$$

Le résultat de l'optimisation est tracé sur la figure 4.40. La distribution de Plaut est également représentée pour information.

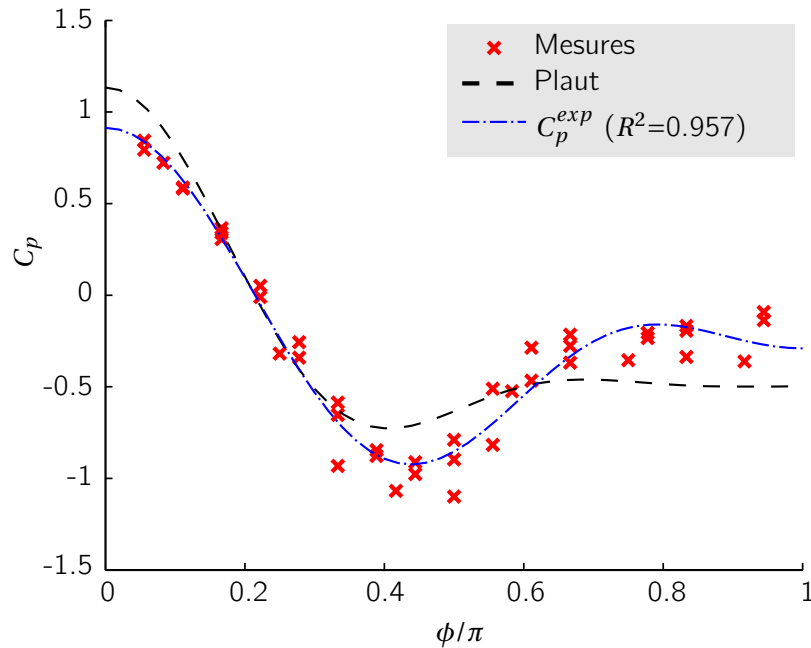


Fig. 4.40 – Modélisation du champ de pression par optimisation sur les résultats expérimentaux et comparaison avec la distribution de Plaut *et al.* [PGKH00].

Utilisation de la VIC

La forme du champ de pression étant connue (équation (4.29)), il est possible d'utiliser les coefficients a_i de la distribution comme paramètre de contrôle de la VIC afin d'identifier le champ de pression sur la structure. La VIC est appliquée sur la ligne neutre de la face visible du bâtiment (orientée vers le caisson de contrôle) par l'intermédiaire de la caméra Elphel, de résolution 2592x1936 pixels équipée d'une optique Edmund 68-670 de focale 5 mm. Le problème mécanique est modélisé à l'aide de l'élément fini poutre gonflable. Des liaisons pivots sont appliquées à chaque extrémité de l'arche (laissant la rotation libre). Pour

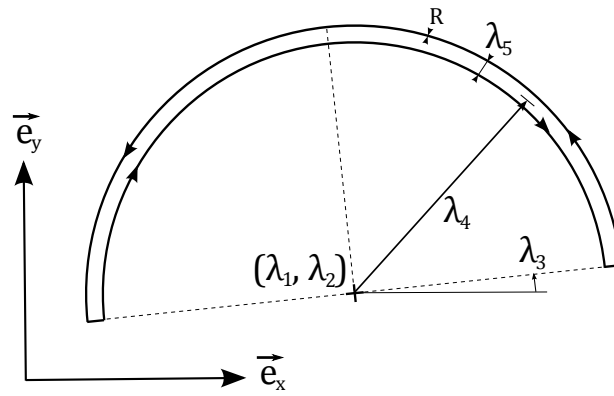


Fig. 4.41 – Image virtuelle de la ligne neutre de la face visible du bâtiment utilisée pour démarrer la corrélation.

l'application de la VIC, l'image en couleur est convertie en noir et blanc. Les inconnues du problème sont le mouvement de corps rigide ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), le rayon du bâtiment (λ_4), l'épaisseur de la ligne neutre (λ_5) et les paramètres a_i de la distribution de C_p ($\lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}$). Les inconnues géométriques sont représentées sur la figure 4.41. La corrélation débute à partir d'approximation sur les paramètres de contrôle : $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0, \lambda_5^0$ sont initialisés par un clic utilisateur, la ligne neutre est supposée non déformée ($\lambda_6^0 = \lambda_7^0 = \lambda_8^0 = \lambda_9^0 = \lambda_{10}^0 = 0$) et la demi-épaisseur du contour virtuel est définie comme $B = 0.35\lambda_5$. La corrélation est effectuée pour 4 vitesses de vent sur la maquette SG2-F1.

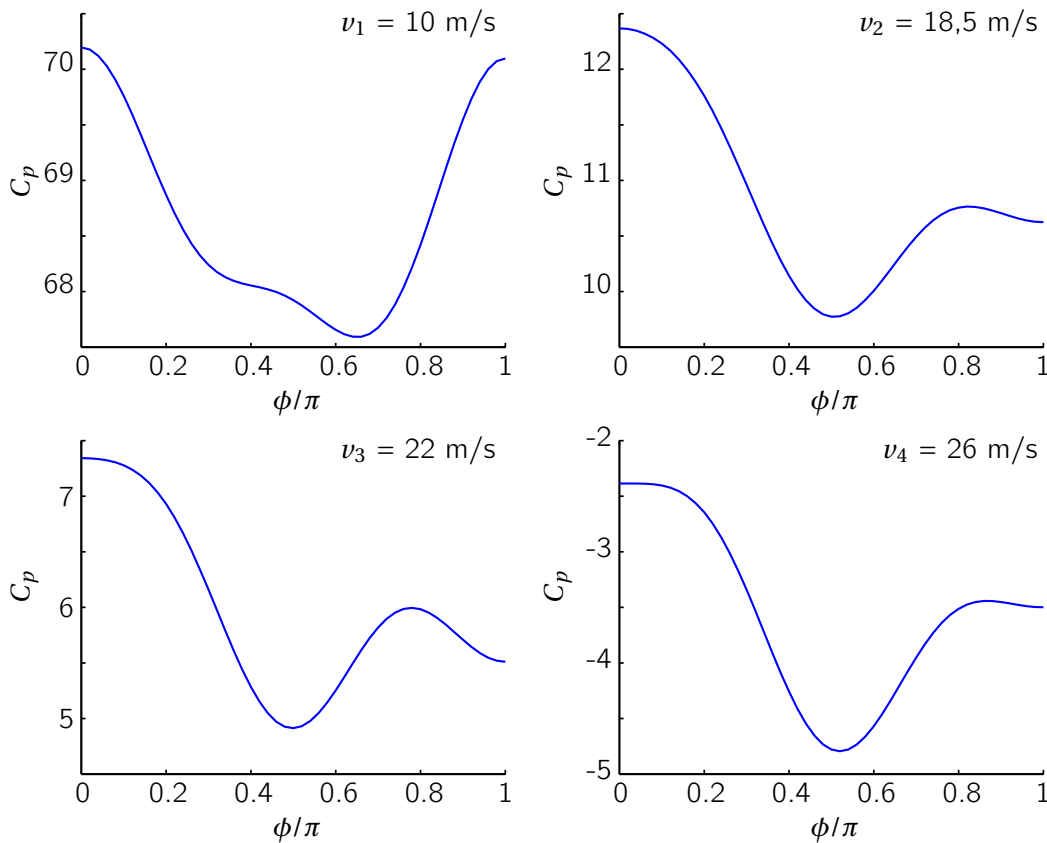


Fig. 4.42 – Champ de pression identifié par la VIC sur la maquette SG2-F1 à quatre vitesses de vent différentes.

On remarque tout d'abord que les valeurs des coefficients de pression C_p ne sont pas réalistes. Les profils de C_p identifiés sont néanmoins très proches les uns des autres, excepté pour la première vitesse. Les distributions de C_p obtenues pour chacune des vitesses de vent paraissent être translatées les unes par

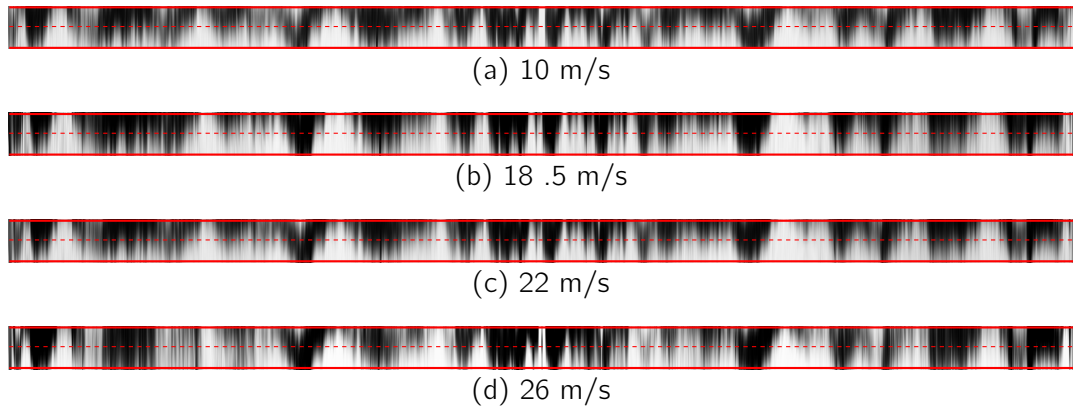


Fig. 4.43 – Image physique représentée dans le repère du contour virtuel.

rapport au autres. Ce résultat traduit la mauvaise identification du coefficient a_0 dans l'équation (4.29). Les résultats sont approfondis par une étude de chaque terme a_i séparément. La valeur de chaque coefficient a_i identifié par la VIC est représentée sur la figure 4.44. Il apparaît alors que, excepté pour la première vitesse de vent, les coefficients a_1 , a_2 , a_3 , a_4 et a_5 sont du même ordre de grandeur et proches les uns des autres. La différence entre les 4 distributions de C_p est alors principalement due à l'erreur sur a_0 .

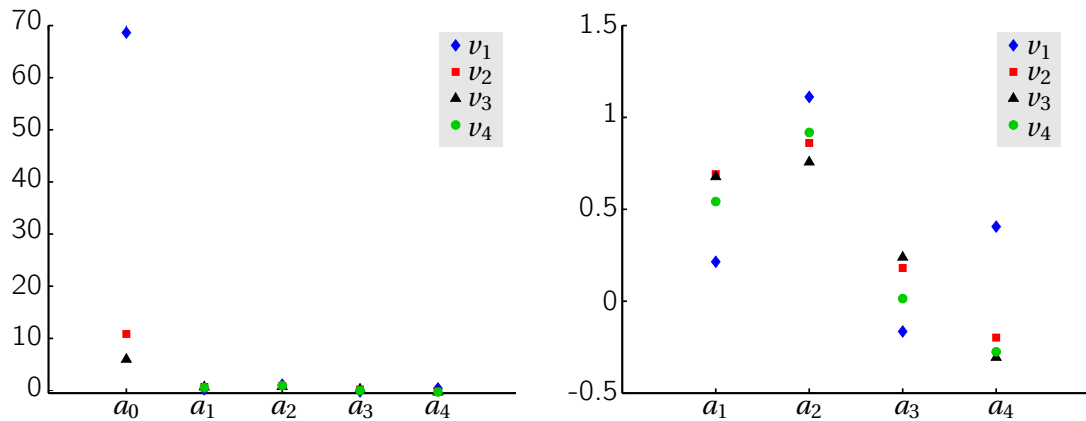


Fig. 4.44 – Valeur des coefficients a_i de la distribution de C_p pour chaque vitesse de vent (gauche) et focalisation sur les coefficients a_1 à a_5 (droite).

Le coefficient a_0 traduit une pression uniforme appliquée à la surface du bâtiment et n'a que très peu d'influence sur le déplacement final. Cette conclusion est illustrée par une analyse de sensibilité sur les résultats obtenus pour le champ C_p à $v_4=26$ m/s. La distribution identifiée par la VIC pour C_p à cette vitesse

$$C_p^{v_4}(\phi) = -3.5856 + 0.5422\cos\phi + 0.9181\cos2\phi + 0.0144\cos3\phi - 0.2754\cos4\phi \quad (4.32)$$

est choisie comme référence et le déplacement associé à cette distribution est noté $\mathbf{U}^{ref}$. L'analyse de sensibilité consiste à étudier le déplacement du bâtiment à l'aide de l'élément fini poutre gonflable avec différentes valeurs de a_0 afin de quantifier l'impact de ce coefficient sur le déplacement du bâtiment. Pour chaque calcul, la norme $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ du déplacement est définie tout comme l'écart relatif à la solution de référence $\frac{\Delta\|\mathbf{U}\|}{\|\mathbf{U}\|^{ref}}$:

$$\Delta\|\mathbf{U}\| = \|\mathbf{U}\| - \|\mathbf{U}\|^{ref} \quad (4.33)$$

La figure 4.45 indique la variation observée sur le déplacement final selon la position sur la maquette. La courbe pleine bleue correspond à une augmentation de a_0 de 10%, la courbe en tirets rouges correspond à une augmentation de a_0 de 50% et la courbe en points-tirets noirs correspond à une variation de 100%. Les

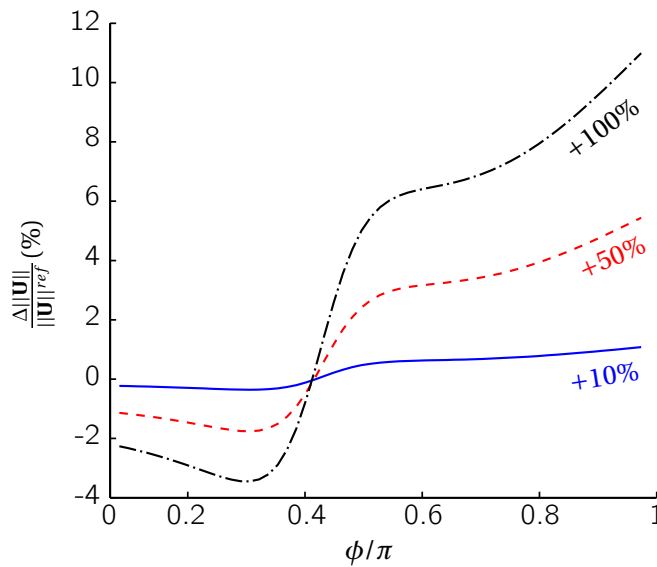


Fig. 4.45 – Variation observée sur la norme du déplacement quand a_0 varie de 10% (bleu), de 50% (rouge) et de 100% (noir).

courbes révèlent un faible impact du terme a_0 sur la solution étant donné qu'un doublement de la valeur de a_0 produit seulement une variation maximale de 11% sur le déplacement final. De plus, le cas étudié (i.e. $v_4=26\text{m/s}$) est le plus impacté par un changement de a_0 car ce changement est amplifié par la pression ambiante du vent (équation 4.24), l'erreur diminue avec la vitesse du vent. L'utilisation des capteurs est plus pertinente dans cette étude.

4.4.7 Mesure du déplacement - rapport d'échelle

Validation de l'hypothèse de problème plan

La géométrie du bâtiment est choisie de sorte qu'il puisse être modélisé par l'élément fini poutre gonflable adapté pour la prise en compte du pli dans l'optique de l'application de la VIC. L'élément fini sert alors à la construction du descripteur (*cf* chapitre 3). La première étape consiste à valider l'hypothèse 2D dans le cas où la direction d'incidence du vent correspond à l'axe du bâtiment. Cette première étape est effectuée par deux mesures successives. Dans un premier temps, la vitesse du vent est maintenue constante tandis que la pression de gonflage est progressivement diminuée. Dans un second temps, le bâtiment est maintenu à pression constante tandis que le vent est augmenté progressivement jusqu'à atteindre un maximum puis est diminué progressivement. Ces deux manipulations sont effectuées sur une maquette de taille SG2. L'étude des trajectoires identifiées lors de la dépression de la structure SG2-F (fig. 4.46) confirme que l'étude du bâtiment peut se limiter à l'étude d'une seule de ses arches. Ce résultat est confirmé par la seconde manipulation effectuée sur la structure SG2-T. Outre l'équivalence des trajectoires sur chacune des arches, le résultat montre également que la trajectoire n'est pas la même selon que le vent voulu soit approché par valeurs supérieures ou inférieures.

Étude des maquettes réalisées dans un même matériau

Après avoir vérifié l'équivalence du champ de pression sur les bâtiments à plusieurs échelles et après la validation de l'hypothèse de problème plan, le déplacement des trois tailles de maquettes est étudié, en dynamique par le système MCS et en quasi-statique pour la VIC. La mesure est effectuée en conservant le même matériau (Ferrari F302), les nombres adimensionnés Π_1 , Π_2 , Π_3 et Π_4 permettent d'obtenir les

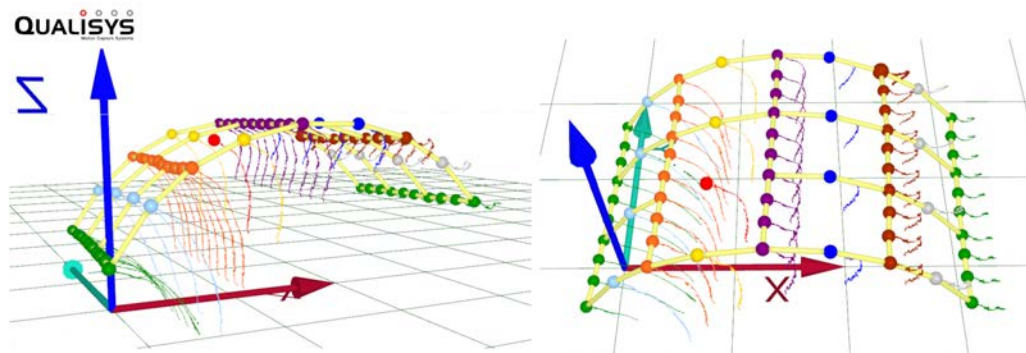


Fig. 4.46 – Mise en évidence de l'équivalence des trajectoires de chacune des 10 arches de la maquette SG2-F, réduction du problème à l'étude en 2 dimensions.

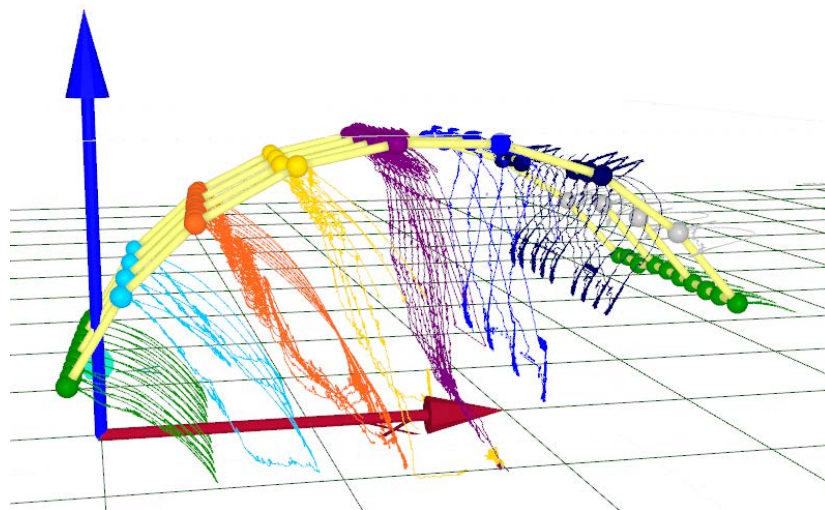


Fig. 4.47 – Trajectoires obtenues sur la maquette SG2-T pour une phase de chargement suivie d'une relaxation.

pressions et les vitesses de vent à appliquer. Les structures utilisées sont donc SG1-F1, SG2-F1 et SG3-F1. On s'intéresse pour le moment au comportement préplissage, on propose de travailler à quatre vitesses de vent différentes résumées dans le tableau 4.6. On exploite le champ de déplacement identifié par la VIC lors de l'identification des champs de pression précédent

Tab. 4.6 – Détails des mesures effectuées dans le cadre de l'application du théorème de Vashy-Buckingham sur le bâtiment gonflable.

Modèle	SG1-F1	SG2-F1	SG3-F1
pression(bar)	0,0138	0,04	0,124
v_1 (m/s)	5	9	15
v_2 (m/s)	10	17	30
v_3 (m/s)	12.5	21.5	37
v_4 (m/s)	15	26	45

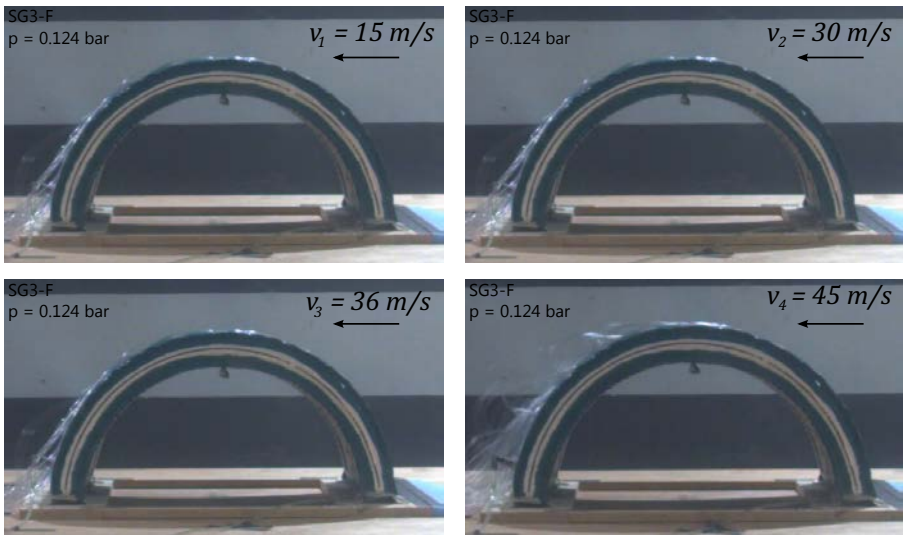


Fig. 4.48 – État de la maquette SG3-F1 pressurisée à $p = 0,124 \text{ bar}$ pour les 4 vitesses de vent de référence : $v_1 = 15 \text{ m/s}$, $v_2 = 30 \text{ m/s}$, $v_3 = 36 \text{ m/s}$ et $v_4 = 45 \text{ m/s}$.

Les déplacements observés sur SG3-F1 sont très faibles. La déformée de la structure, visible sur la figure 4.48, ne varie pas d'une photo à l'autre. Cette très faible variation dans la position des points ne peut pas être quantifiée avec le système de tracking, la résolution de ce dernier (de l'ordre du millimètre) est supérieure au déplacement existant. On utilise le paramétrage présenté au paragraphe précédent pour l'application de la VIC. Les déplacements relevés ainsi que les déformées correspondantes sont tracés sur la figure 4.49.

Le déplacement théorique est donné en considérant le champ de pression déterminé lors de l'étude du chargement (cf. éq (4.31)) et les propriétés du tissu dans le modèle élément fini sans prise en compte du pli (ce dernier n'apparaissant pas). La comparaison est effectuée sur la figure 4.50. Ces résultats doivent être interprétés avec prudence puisque les déplacements mesurés sont faibles. La forme du champ de déplacement expérimental est très proche de la forme donnée par le modèle élément fini. La différence diminue lorsque le déplacement augmente (et est donc plus significatif). L'amplitude du résultat expérimental est plus faible que l'amplitude anticipée par le calcul élément fini. Ceci traduit une surrigidité de la maquette par rapport à la modélisation numérique.

Le déplacement de la structure SG2-F est plus marqué et peut s'observer à l'oeil nu depuis le poste de contrôle de la soufflerie. Les déformées de la structures aux 4 vitesses de référence sont présentées sur

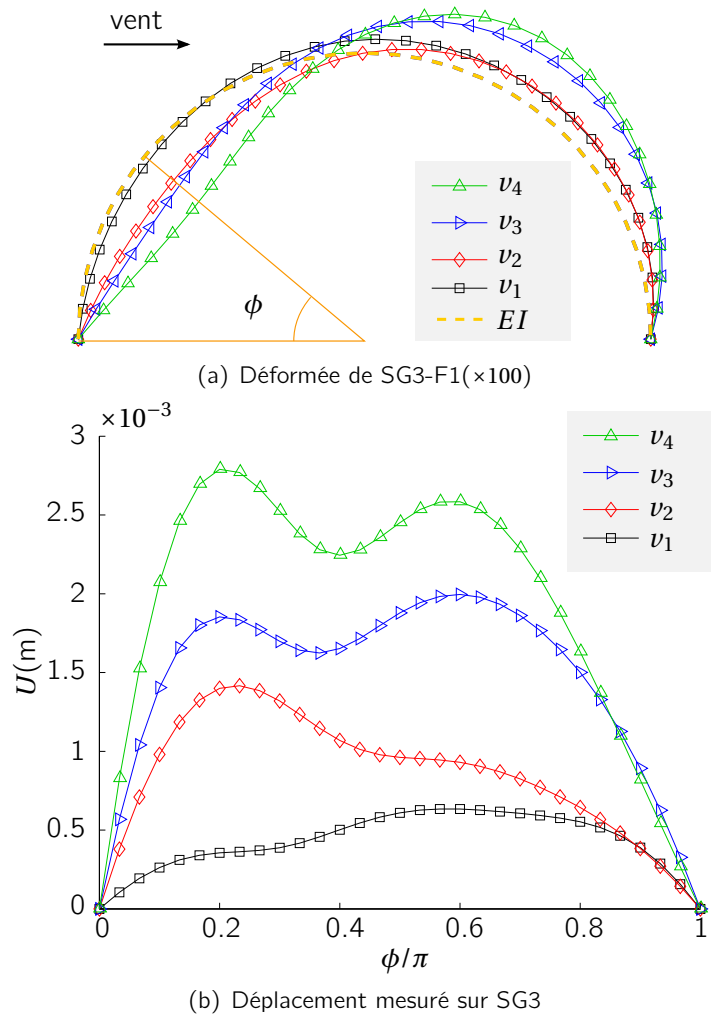


Fig. 4.49 – Déformation (a) et déplacement (b) mesurés sur le bâtiment SG3-F1 pressurisé à $p = 0,124$ bar pour chaque vitesse de référence : $v_1 = 15$ m/s, $v_2 = 30$ m/s, $v_3 = 36$ m/s et $v_4 = 45$ m/s.

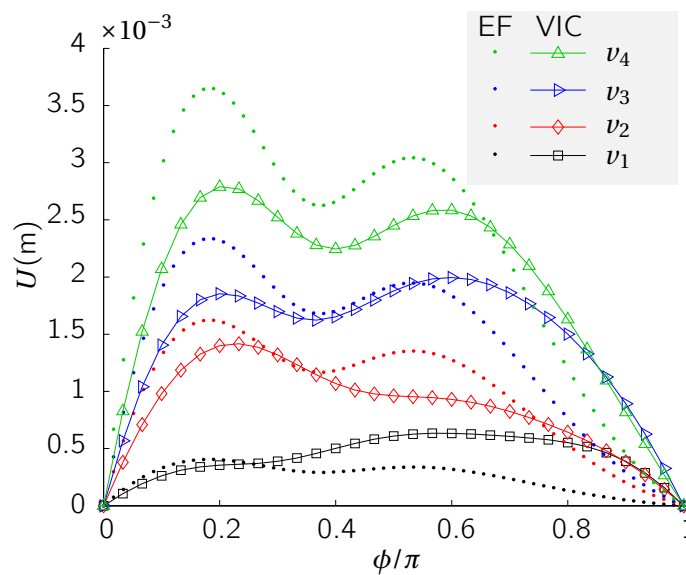


Fig. 4.50 – Comparaison des déplacements expérimentaux et donnés par le calcul élément fini du bâtiment SG3-F pressurisé à $p = 0,124$ bar pour les 4 vitesses de vent de référence : $v_1 = 15$ m/s, $v_2 = 30$ m/s, $v_3 = 36$ m/s et $v_4 = 45$ m/s.

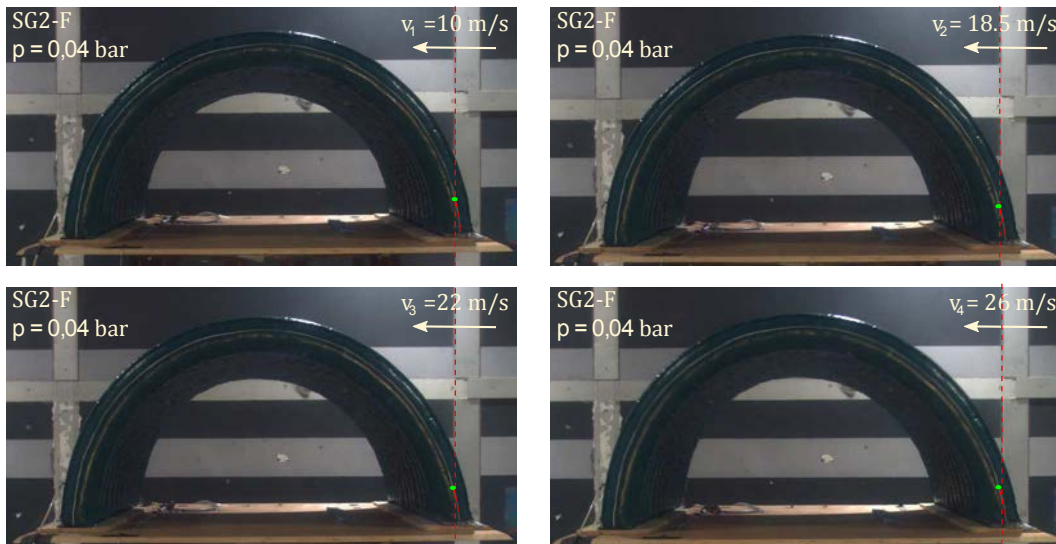


Fig. 4.51 – État du bâtiment SG2-F pressurisée à $p = 0,124$ bar pour les 4 vitesses de vent de référence : $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = 18.5$ m/s, $v_3 = 22$ m/s et $v_4 = 26$ m/s.

la figure 4.51. L'exploitation du déplacement mesuré par le système de trajectographie sur la figure 4.52 montre que la position du bâtiment oscille autour d'une position moyenne. Les résultats donnés par la VIC sont ajoutés sur la même figure. Le déplacement mesuré par VIC présente une forme cohérente avec le système MCS pour les vitesses V_2 , v_3 et v_4 . La forme diffère pour v_1 mais l'ordre de grandeurs est respecté. Le résultat issu de la VIC dépend du moment où la prise de vue est effectuée. Cette dernière est réalisée après stabilisation de la structure. La même procédure est appliquée pour construire la figure 4.54, qui présente le déplacement vertical V . On remarque que le déplacement dans cette direction est moins important que le déplacement mesuré dans l'axe de la soufflerie U . On observe un écart entre les courbes issues de l'application de la VIC et les courbes obtenues par le système MCS. Cet écart est de l'ordre du millimètre, ce qui correspond à la précision du système de mesure. Les résultats sont cohérents.

L'analyse de SG1 est difficile par application de la VIC en raison du manque de recul dans la veine. Les résultats présentés sont issus du système de trajectographie. La figure 4.55 présente le déplacement instantané observé du bâtiment SG1 ainsi que le déplacement moyen.

On propose de comparer le déplacement des trois structures sur la figure 4.56. On trace le rapport entre le déplacement axial U et le rayon de l'arche R en fonction du rapport ϕ/π pour travailler avec des grandeurs adimensionnées. Les courbes ainsi obtenues doivent se superposer si les conditions de similitudes sont respectées. On observe sur la figure 4.56 une grande proximité entre les courbes correspondantes aux structures SG1-F et SG2-F. Excepté pour la première vitesse, la courbe correspondant à la structure SG1-F est située au dessus de la courbe correspondant à la structure SG2-F. Ce comportement indique que la structure SG2-F est plus rigide que la structure SG1-F. La comparaison de ces résultats avec la courbe représentative de la structure SG3-F montre un écart important. La structure SG3-F est bien plus rigide qu'il ne faudrait. La réalisation de maquette en conservant le même matériau n'est donc pas idéale.

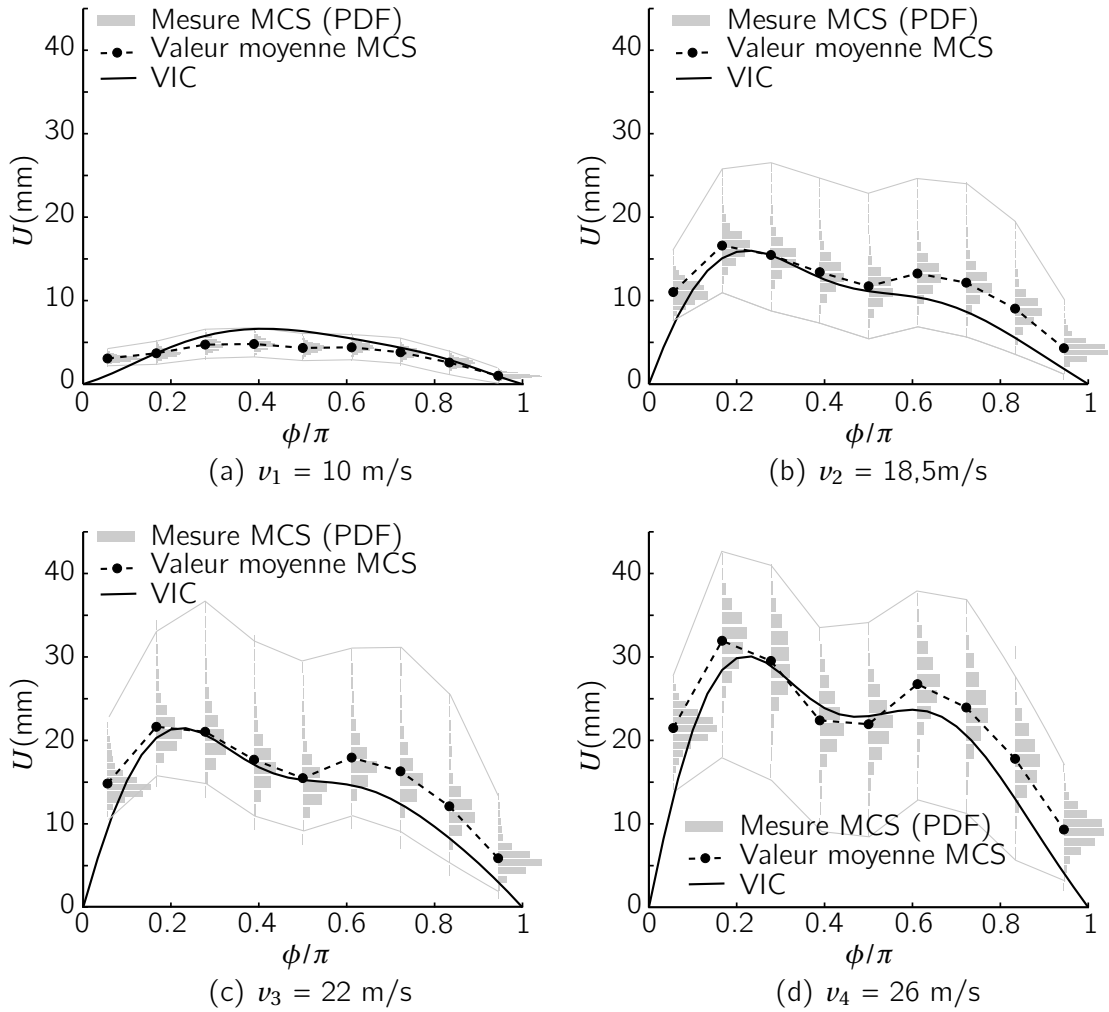


Fig. 4.52 – Mesure du déplacement axial U sur SG2-F par l'application de la VIC et par l'utilisation du système de trajectographie pour chaque vitesse de référence : (a) $v_1 = 10$ m/s, (b) $v_2 = 18.5$ m/s, (c) $v_3 = 22$ m/s et (d) $v_4 = 26$ m/s.

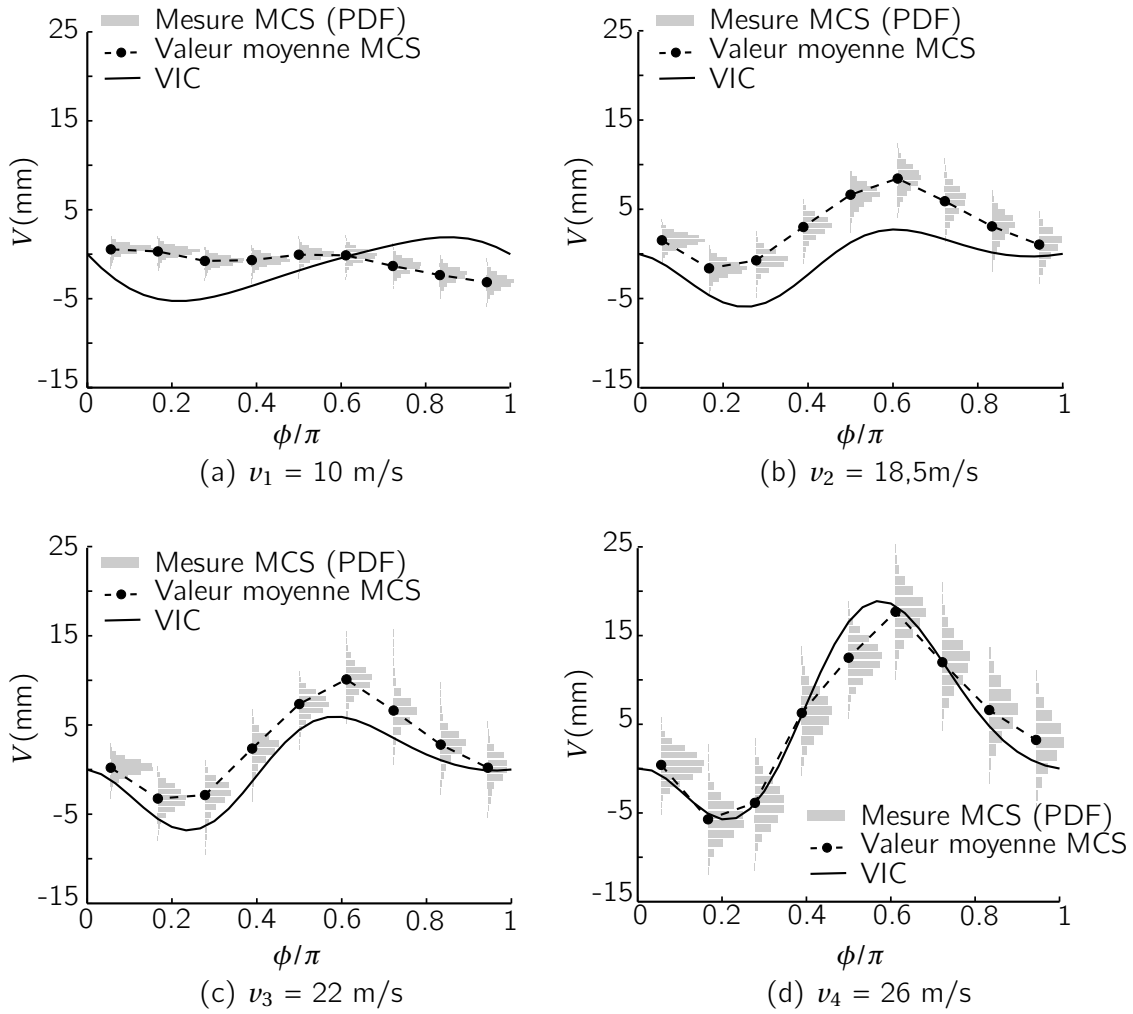


Fig. 4.53 – Mesure du déplacement vertical V sur SG2-F par l'application de la VIC et par l'utilisation du système de trajectographie pour chaque vitesse de référence : (a) $v_1 = 10$ m/s, (b) $v_2 = 18.5$ m/s, (c) $v_3 = 22$ m/s et (d) $v_4 = 26$ m/s.

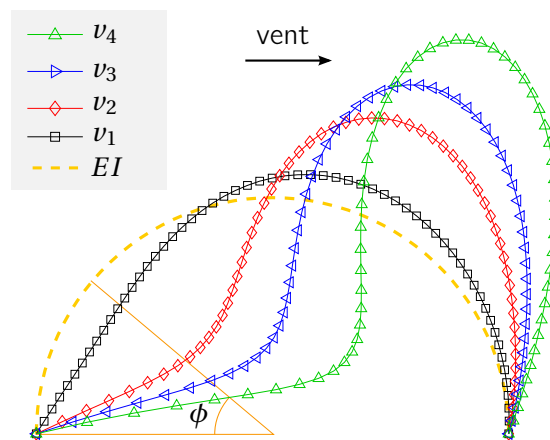


Fig. 4.54 – Déformation mesurée par VIC amplifiée ($\times 100$) sur le bâtiment SG2-F pressurisé à $p = 0,04$ bar pour chaque vitesse de référence : $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = 18.5$ m/s, $v_3 = 22$ m/s et $v_4 = 26$ m/s.

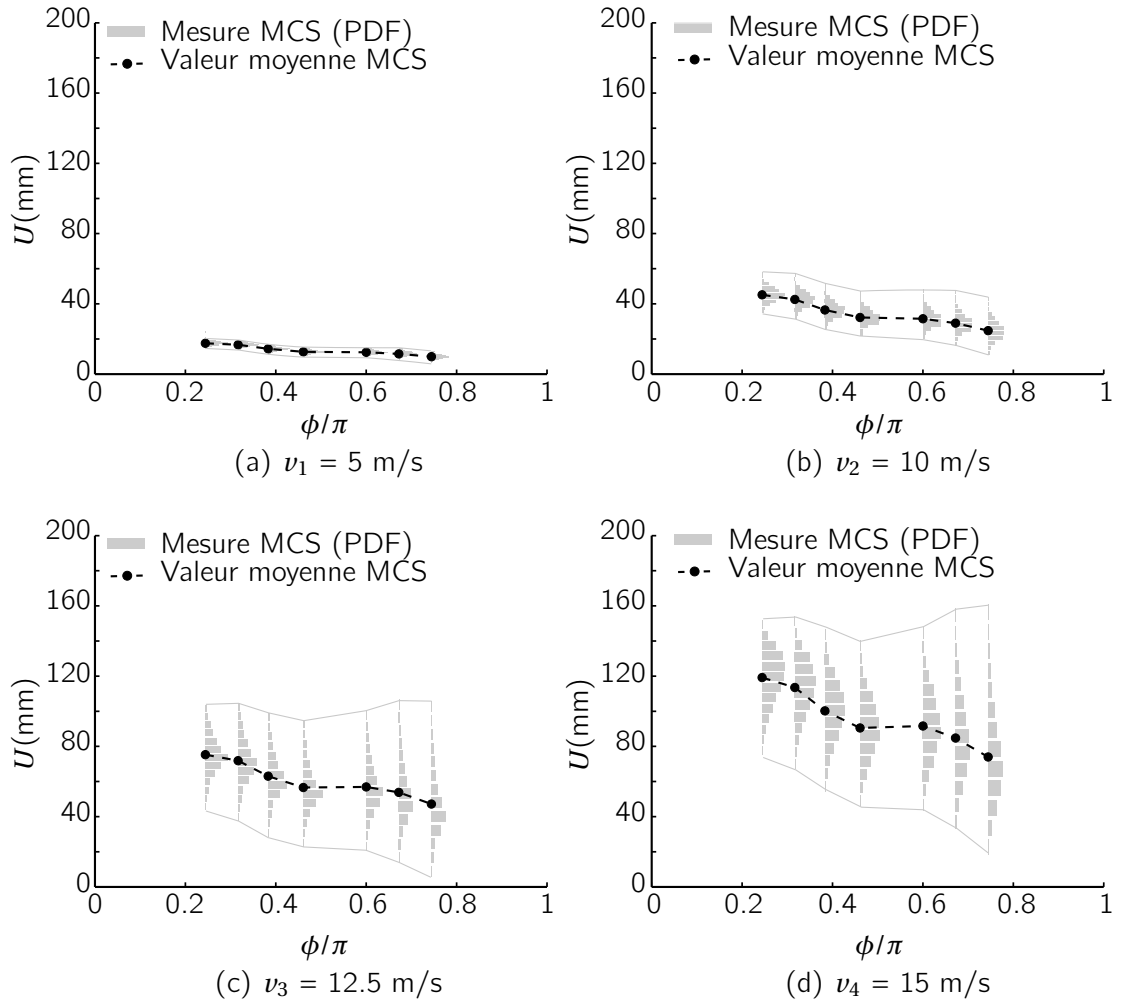


Fig. 4.55 – Mesure du déplacement axial U sur SG1-F par l'utilisation du système de trajectographie pour chaque vitesse de référence : (a) $\nu_1 = 5 \text{ m/s}$, (b) $\nu_2 = 10 \text{ m/s}$, (c) $\nu_3 = 12.5 \text{ m/s}$ et (d) $\nu_4 = 15 \text{ m/s}$.

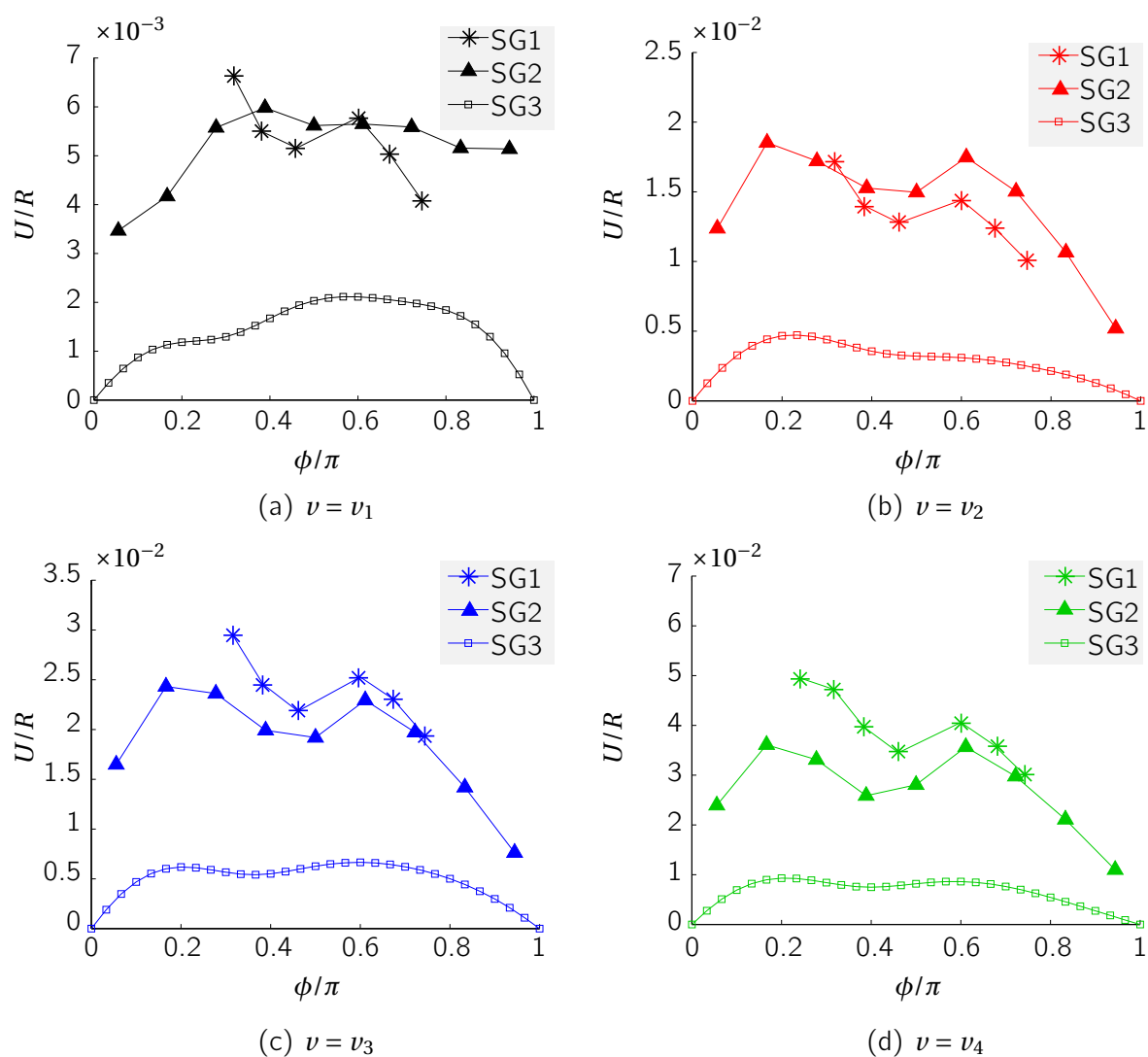


Fig. 4.56 – Comparaison des déplacements des trois structures à chaque vitesse de référence.

4.4.8 Conclusion

Cette première étude sur des modèles réduits permet de poser les conclusions suivantes :

- On dispose du champ de pression sur les maquettes déformées, ce dernier est reproductible à plusieurs échelles.
- Il est possible de mesurer les charges de pli et de ruine sur des modèles réduits
- La reproduction à échelle réduite du déplacement est limitée par la trop grande rigidité des modèles réduits, avec les techniques de fabrication employées ici.
- La diminution de la taille des maquettes est limitée par la technologie de fabrication et la nature des textiles utilisés dans l'industrie pour la fabrication de ce type de bâtiment.

Ces conclusions nous permettent cependant de confirmer la possibilité d'étudier des modèles réduits de structures gonflables. Les résultats obtenus dans cette étude étant positifs sous de nombreux aspects. Il reste à lever la question de la rigidité qui ne prend en compte, dans cette étude, que la rigidité du matériau lui-même et omet l'effet des coutures et l'interaction aux liaisons. La prochaine étape est donc la recherche de tissus et de techniques d'assemblage plus adaptées à des structures de petite taille.

4.5 Conclusion

Ce chapitre a permis l'étude en soufflerie de structures gonflables. Un premier essai a été conduit sur une structure simple, une poutre, afin de valider la méthode de mesure proposée (la VIC) sur des problèmes complexes. Cette première étude repose sur la mesure de la traînée d'une poutre gonflable et l'identification des charges de pli et de ruine. Les résultats montrent que les valeurs obtenues pour ces deux grandeurs sont très proches des valeurs prévues par l'application des modèles développés au premier chapitre. Un second essai est conçu pour l'étude des conditions de similitudes. L'essai repose sur un bâtiment demi-cylindrique représenté à plusieurs échelles réalisés dans un même matériau. Les chargements et la pression interne à appliquer sont calculés par l'application du théorème de Vashy-Buckingham. Les résultats confirment la possibilité d'étudier une même structure à deux échelles proches. La réduction de taille entraîne cependant une rigidité trop importante de la maquette. Des investigations supplémentaires doivent être menées sur les techniques d'assemblage, les liaisons et les textiles à utiliser pour la fabrication de modèles réduits.

Conclusion et perspectives

L'objectif proposé dans la thèse est l'étude et la modélisation du comportement de structures gonflables sous chargement aérodynamique sous trois aspects : le développement et l'adéquation de modèles, la réalisation d'une étude comportementale, et la problématique des maquettes à différentes échelles. Après examen de la littérature, le travail effectué permet d'apporter des réponses à chacun de ces trois aspects. Les principaux résultats sont présentés ci-après :

- **Développement de modèles** : l'étude bibliographique permet de disposer de modèles analytiques pour l'étude d'une poutre gonflable avant l'apparition du pli et pour prévoir l'apparition du pli. Le travail mené permet d'étendre les formulations analytiques au comportement post-pli et la prévision de la charge de ruine. Le tableau 4.7 résume les avancées, indiquées en gras, dans la modélisation de structures gonflables à l'issue de la thèse.

Tab. 4.7 – Positionnement des résultats obtenus pour l'étude de structures gonflables

Comportement	Structure simple (poutre)	Structure complexe
Avant le pli	Modèles Analytiques	
	EF poutre gonflable	EF poutre gonflable
	Code 3D membrane	Code 3D membrane
	Critère de pli	
Après le pli	Modèles Analytiques	
	EF poutre gonflable	EF poutre gonflable
	Code 3D membrane	Code 3D membrane
	Critère de ruine	

- **Adéquation des modèles** : l'utilisation et l'adaptation de la corrélation d'image virtuelle (VIC) permettent de confirmer l'adéquation des modèles et la validation expérimentale des charges de pli et de ruine. La possibilité d'utiliser les modèles développés dans l'algorithme de résolution de la VIC permet de disposer d'un outil adapté et dédié à la mesure de structures gonflables afin d'étudier les courbes force-déplacement et de caractériser le matériau ou le chargement. Ce dernier aspect est complété par le développement de capteurs de pression.
- **Étude comportementale** : La réalisation d'essais, d'abord en statique puis en soufflerie montre l'importance de la géométrie en configuration initiale et de la pression de gonflage sur la charge de pli et la charge de ruine. Le déplacement dépend de la géométrie, du matériau et de la pression de gonflage (la résultante des efforts de pression interne P apparaît explicitement dans les équations analytiques et la matrice de rigidité de l'élément fini poutre).
- **Recherche d'une loi de similitude** : La question des similitudes est simple lorsque les équations analytiques sont disponibles. Le développement de modèle effectué dans ce travail permet de traiter le

cas de la poutre sans difficulté majeure. Pour les structures plus complexes, l'application du théorème de Vashy-Buckingham permet d'identifier les différents nombres adimensionnés régissant le problème. L'utilisation de ces nombres adimensionnés lors d'une étude numérique (avec l'élément fini poutre gonflable) montre la possibilité d'étudier une même structure à différentes échelles. La réalisation d'essais sur une structure demi-cylindrique montre qu'il est possible de représenter un même comportement, expérimentalement, à partir de maquettes à différentes tailles. Cependant, les résultats montrent la nécessité de conduire des investigations supplémentaires notamment dans le choix des tissus et la réalisation des liaisons.

Les résultats obtenus à l'issue de ce travail contribuent à une meilleure compréhension du comportement d'une poutre gonflable et permettent de disposer de mesures et de résultats expérimentaux. Cependant, plusieurs pistes d'approfondissement et d'élargissement peuvent être envisagées pour ce travail :

- Aborder le cas des chargements combinés : on a considéré dans cette thèse seulement un chargement de type vent, l'étude d'une combinaison neige-vent est particulièrement pertinente en raison d'une combinaison compression-flexion.
- Utiliser la VIC comme outil de monitoring afin de d'obtenir une relation précise entre la forme d'une structure et la répartition de la pression due au vent.
- Mener une étude approfondie sur les textiles et la qualité des liaisons lors de la réalisation de modèles réduits.

Bibliographie

- [ARJ⁺09] K.L. Apedo, S. Ronel, E. Jacquelin, M. Massenzio et A. Bennani : Theoretical analysis of inflatable beams made from orthotropic fabric. *Thin-walled structures*, 2009.
- [ARJ⁺10] K.L. Apedo, S. Ronel, E. Jacquelin, A. Bennani et M. Massenzio : Nonlinear finite element analysis of inflatable beams made from orthotropic woven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 47:2017–2033, 2010.
- [ASC02] Tensile membrane structures. Rapport technique, American Society of Civil Engineering, 2002.
- [B⁺97] M. Biger *et al.* : *Recommandations pour la conception des ouvrages permanents de couverture textile*. 1997. réédité en 2007.
- [BAZ92] M. Baruch, J. Arbocz et G.Q. Zhang : Imperfection sensitivity of the brazier effect for orthotropic cylindrical shells. Rapport technique, Delft University of Technology LR-687, 1992.
- [BBM⁺06] P. Biagini, C. Borri, M. Majowiecki, M. Orlando et Procino : BLWT tests and design loads on the roof of the new olympic stadium in piraus. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 94:293–307, 2006.
- [BGB04] B.N. Bridgens, P.D. Gosling et M.J.S. Birchall : Membrane material behaviour : concepts, practise and developments. *Structural Engineer*, 82(14):28–33, 2004.
- [Bie75] J. Bietry : Etude des effets du vent sur les structures gonflables : conditions de similitude. Rapport technique, CSTB Nantes, 1975.
- [BL04] R. Bouzidi et A. Le Van : Numerical solution of hyperelastic membranes by energy minimization. *Computers and Structures*, 82:2961–1969, 2004.
- [BL13] R. Bouzidi et S. Buytetand A. Le Van : A numerical and experimental study of the quasi-static deployment of membrane tubes. *International Journal of Solids and Structures*, 50:651–661, 2013.
- [BL14] R. Barsotti et S. Ligarò : Numerical analysis of partly wrinkled cylindrical inflated beams under bending and shear. *Thin-Walled Structures*, 84:20–213, 2014.
- [BM67] G. Berger et E. Macher : Results of wind tunnel tests on some pneumatic structures. *Proceedings of the 1st colloquium on pneumatic structures*, IASS, pages 142–145, 1967.
- [Bra27] L.G. Brazier : On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections. *Proceedings of the Royal Society A*, 1927.
- [BRW03] R. Bouzidi, Y. Ravaut et C. Wielgosz : Finite elements for 2d problems of pressurized membranes. *Computers and Structures*, 81:2479–2490, 2003.
- [BRZ14] M. Belloli, L. Rosa et A. Zasso : Wind loads on a high slender tower : Numerical and experimental comparison. *Engineering Structures*, 68:24–32, 2014.
- [BYX82] P.J. Burt, C. Yen et X. Xu : Local correlation measures for motion analysis : a comparative study. *In Proc. IEEE Conf. on Pattern Recogniton and Image Processing*, pages 269–274, Washington DC, 1982.

- [CB] J.A. Calgaro et P. Bisch : Eurocodes - codes européens de conception des constructions. *Techniques de l'ingénieur*.
- [CBG⁺14] A.G. Colman, B.N. Bridgens, P.D. Gosling, G.-T. Joub et X.-Y. Hsub : Shear behaviour of architectural fabrics subjected to biaxial tensile loads. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 66:163–174, 2014.
- [CCHM] L. Chevalier, S. Calloch, F. Hild et Y. Marco : Digital image correlation used to analyse.
- [CHD⁺01] C. Calloch, F. Hild, C. Doudard, C. Bouvet et C. Lexcellant : Analyse d'essais de compression biaxiale sur un AMF à l'aide d'une technique d'intercorrélation d'images numériques. *Proc. Photomécanique 2001, GAMAC, Paris, France*, 2001.
- [Cho97] S. Choura : Suppression of structural vibrations of an air-inflated membrane dam by its internal pressure. *Computer and Structures*, 65(5):669–677, 1997.
- [CHR07] D. Claire, F. Hild et S. Roux : Identification of a damage law by using full-field displacement measurements. *International Journal of Damage Mechanics*, 16:179–197, 2007.
- [CJS03] P.V. Cavallaro, M.E. Johnson et A.M. Sadegh : Mechanics of plain-woven fabrics for inflated structures. *Composite Structures*, 61:375–393, 2003.
- [CL63] R.L. Comer et S. Levy : Deflections of an inflated circular cylindrical cantilever beam. *AIAA Journal*, 1963.
- [CPL⁺15] M. Van Craenenbroeck, S. Puystiens, L. De Laet, D. Van Hemelrijck et M. Mollaert : Biaxial testing of fabric materials and deriving their material properties - a quantitative study. *In Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015*, 2015.
- [CTH91] D. Choi, J.L. Thorpe et R. Hanna : Image analysis to measure strain in wood and paper. *Wood science and Technology*, 25:251–262, 1991.
- [Dav07] W.G. Davids : Finite-element analysis of tubular fabric beams including pressure effects and local fabric wrinkling. *Engineering structures*, 44:24–33, 2007.
- [DGE05] DGE : Etude sur les textiles techniques : rapport intermédiaire de fin de phase 1. Rapport technique, 2005.
- [DZ08] W.G. Davids et H. Zhang : Beam finite-element analysis of pressurized fabric beam-columns. *Engineering structures*, 30:1969–1980, 2008.
- [EC199] *Eurocode 1 : Bases de calcul et actions sur les structures*. AFNOR, 1999.
- [EDG04] *European Design Guide for Tensile Surface Structures*. Tensinet, 2004.
- [Fic66] W.B. Fichter : A theory for inflated thin wall cylindrical beams. Rapport technique, NASA TN D-3466, 1966.
- [FSA10] M.L.M. Francois, B. Semin et H. Auradou : Identification of the shape of curvilinear beams and fibers. *Applied mechanics and materials*, 2010.
- [Gei70] D. Geiger : U.S. pavilion at expo 70 features air-supported cable roof. *Civil Engineering - ASCE*, March 1970.
- [GHDS92] C. G'Sell, J.M. Hiver, A. Dahnoun et A. Souahi : Video-controlled tensile testing of polymers and metals beyond the necking point. *Journal of Materials Science*, 27:5031–5039, 1992.
- [GHP02] G. Geymonat, F. Hild et S. Pagano : Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes Rendus Mécanique*, 330:403–408, 2002.
- [GL09] C. Galliot et R.H. Luchsinger : A simple model describing the non-linear biaxial tensile behaviour of pvc-coated polyester fabrics for use in finite element analysis. *Composite Structures*, 90:437–447, 2009.

-
- [GL10a] C. Galliot et R.H. Luchsinger : The shear ramp : a new test method for the investigation of coated fabric shear behaviour - part 1 : Theory. *Composites : Part A*, 41(10):1743–1749, 2010.
- [GL10b] C. Galliot et R.H. Luchsinger : The shear ramp : a new test method for the investigation of coated fabric shear behaviour - part 2 : Experimental validation. *Composites : Part A*, 41(10):1750–1759, 2010.
- [Gos07] P.D. Gosling : Tensinet analysis and materials working group - basic philosophy and calling notice. *Tensinet Newsletter*, 13:12–15, 2007.
- [Hay49] I. Hayashi : On the elastic instability of orthogonal anisotropic cylindrical shells, especially the buckling load due to compression, bending and torsion. *Japan Society of Naval Architecture*, 1949.
- [HCL04] P. Harrison, M.J. Clifford et A.C. Long : Shear characterisation of viscous woven textile composites : a comparison between picture frame and bias extension experiment. *Composite Science Technology*, 64:1453–1465, 2004.
- [HR06] F. Hild et S. Roux : Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties - a review. *Strain*, 42:69–80, 2006.
- [Hsi88] J.C. Hsieh : *Free vibrations of inflatable dams*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1988.
- [IAS86] Recommendations for the design of air supported structures. Rapport technique, International Association for Shell and Spatial Structures, 1986.
- [IW79] H.P.A.H. Irwin et R.L. Waedlaw : A wind tunnel investigation of a retractable fabric roof for the montreal olympic stadium. In *Wind Engineering - Proceedings of the Fifth International Conference*, Fort Collins, Colorado, USA, July 1979.
- [JBG09] A.L. Jackson, B.N. Bridgens et P.D. Gosling : A new biaxial and shear protocol for architectural fabrics. *International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009*, 2009.
- [Jia07] Z. Jiang : *Contribution à la dynamique des poutres gonflables*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2007.
- [LB90a] S. Lukasiewicz et L. Balas : Collapse loads of a cylindrical or toroidal free-standing inflatable membrane. *Mechanics of structures and machines : an international journal*, 1990.
- [LB90b] S. Lukasiewicz et L. Balas : Collapse mode of an inflatable free-standing membrane. *Mechanics of structures and machines : an international journal*, 1990.
- [LB12] S. Ligarò et R. Barsotti : Shear deformations in inflated cylindrical beams : an old model revisited. *Thin-walled structures*, 2012.
- [LBM60] R.W. Leonard, G.W. Brooks et H.G. McComb : Structural considerations of inflatable reentry vehicles. Rapport technique, NASA TN D-457, 1960.
- [LGQG15] Q. Li, X. Guo, Q. Qing et J. Gong : Dynamic deflation assessment of an air inflated membrane structure. *Thin-Walled Structures*, 94:446–456, 2015.
- [LHD⁺08] J. Launay, G. Hivet, A.V. Duong, et P. Boisse : Experimental analysis of the influence of tensions on in plane shear behaviour of woven composite reinforcements. *Composite Science and Technology*, 68(2):506–515, 2008.
- [LW05] A. Le Van et C. Wielgosz : Bending and buckling of inflatable beams : Some new theoretical results. *Thin-walled structures*, 2005.
- [LW06] A. Le Van et C. Wielgosz : Finite element formulation for inflatable beams. *Thin-walled structures*, 2006.
-

- [Mai96] P. Mailler : *Rhéologie des membranes composites souples orthotropes sous chargement multi-axial*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 1996.
- [MDPT09] C.G. Malm, W.G. Davids, M.L. Peterson et A.W. Turner : Experimental characterization and finite element analysis of inflated fabric beams. *Construction and Building materials*, 23:2027–2034, 2009.
- [ML93] M. Malinowski et C. Lyonnet : Structures textiles. *Techniques de l'ingénieur*, C2470, 1993.
- [MPS94] J. Main, S. Peterson et A. Strauss : Load-deflection behaviour of space-based inflatable fabric beam. *Journal of aerospace engineering*, 1994.
- [MPS95] J. Main, S. Peterson et A. Strauss : A beam-type bending of space-based membrane structures. *Journal of aerospace engineering*, 1995.
- [MSA90] Guide for specific membrane structures. Rapport technique, Membrane Structures Association of Japan, 1990.
- [Ngu14] Q.T. Nguyen : *Contribution à l'étude du gonflage, de la flexion et du flambement de tubes membranaires orthotropes pressurisés*. Thèse de doctorat, Université Nantes, 2014.
- [NRM⁺12] T.T. Nguyen, S. Ronel, M.Massenzio, K.L. Apedo et E.Jacquelin : Analytical buckling of an inflatable beam made of orthotropic technical textile. *Thin-Walled Structures*, 2012.
- [NTL14] Q.T. Nguyen, J.C. Thomas et A. Le Van : Some new theoretical results on a pressurized orthotropic membrane tube. *International Journal of Solids and Structures*, 2014.
- [PC05] X.Q. Peng et J. Cao : A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, 36:859–874, 2005.
- [PFTB15] R.S. Pierce, B.G. Falzon, M.C. Thompson et R. Boman : A low-cost digital image correlation technique for characterising the shear deformation of fabrics for draping studies. *Strain*, 51:180–189, 2015.
- [PGKH00] R.H. Plaut, J.K.S. Goh, M. Kigudde et D.C. Hammerand : Shell analysis of an inflatable arch subjected to snow and wind loading. *International Journal of Solids and Structures*, 37:4275–4288, 2000.
- [PLRH09] J.N. Périé, H. Leclerc, S. Roux et F. Hild : Digital image correlation and biaxial test on composite material for anisotropic damage law identification. *International Journal of Solids and Structures*, 45:2388–2396, 2009.
- [Pot02] K. Potter : Bias extension measurements on cross-plyed unidirectional prepreg. *Composites : Part A*, 33(1):63–73, 2002.
- [PSI07] J.B. Pargana, D. Llyod Smith et B.A. Izzudin : Advanced material model for coated fabrics used in tensioned fabric structures. *Engineering Structures*, 29:1323–1336, 2007.
- [PW00] J. Page et J. Wang : Prediction of shear force and an analysis of yarn slippage for a plain wave carbon fabric in a bias extension state. *Composite Science Technology*, 60:977–986, 2000.
- [Rab08] M. Rabaud : Mécanique des fluides. *M1 de Mécanique*, Université Paris Sud, 20008.
- [Ras00] P.K. Rastogi : *Photomechanics*. Springer, 2000.
- [RB67] G. Röntsch et F. Böhme : Model analysis of a semi-cylindrical air-supported hull. *Proceedings of the 1st colloquium on pneumatic structures*, IASS, pages 147–149, 1967.
- [RBRC02] F. Hild B. Raka, B. Baudequin, S. Roux et F. Cantelaube : Multi-scale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation. *Applied Optics*, 41:6815–6828, 2002.

-
- [RF14] J. Réthoré et M.L.M. Francois : Curve and boundaries measurement using b-splines and virtual images. *Optics and Lasers in Engineering*, 52:145–155, 2014.
- [RRCT11] J. Rodriguez, G. Rio, J.M. Cadou et J. Troufflard : Numerical study of dynamical relaxation with kinetic damping applied to inflatable fabric structures with extensions for 3d solid element and non-linear behavior. *Thin-Walled Structures*, 49:1468–1474, 2011.
- [S⁺15] N. Stranhöner *et al.* : Background documentation for a european structural design of tensile membrane structures made from fabrics and foils. Rapport technique, CEN/TC 250/WG 5 Membrane Structures Scientific and Policy Report (SaP-Report), 2015.
- [SAF11] B. Semin, H. Auradou et M.L.M. Francois : Accurate measurement of curvilinear shapes by virtual image correlation. *The European Physical Journal Applied Physics*, 2011.
- [SEB09] *Recommandations pour la conception, la confection et la mise en oeuvre des ouvrages permanents de couverture textile*. SEBTP, 2009.
- [Sem10] B. Semin : *Interaction d'une fibre et d'un écoulement en géométrie confinée*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2010.
- [SH61] M. Stein et J.M. Hedgepeth : Analysis of partly wrinkled membranes. Rapport technique, NASA TN D-813, 1961.
- [SKN05] J.D. Suhey, N.H. Kim et C. Niezrecki : Numerical modelling and design of inflatable structures application to open-ocean-aquaculture cages. *Aquacultural Engineering*, 33:285–303, 2005.
- [Ste75a] E. Steeves : Behavior of pressure stabilized beams under load. Rapport technique, US Army AND-010-702, 1975.
- [Ste75b] E. Steeves : A linear analysis of the deformation of pressure stabilized beams. Rapport technique, US Army AND-006-493, 1975.
- [Suq85] P. Suquet : Elements of homogenisation for inelastic solid mechanics. *Springer*, 1985.
- [SWP⁺83] M.A. Sutton, W.J. Wolters, W.H. Peters, W.F. Ranson et S.R. McNeill : Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3):133–139, 1983.
- [Tho02] J.C. Thomas : *Etude expérimentale et modélisations analytique et numérique des poutres gonflables à haute pression*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2002.
- [TJW06] J.C. Thomas, Z. Jiang et C. Wielgosz : Continuous and finite element methods for the vibrations of inflatable beams. *International Journal of Space Structures*, 2006.
- [TW04] J.C. Thomas et C. Wielgosz : Deflections of highly inflated fabric tubes. *Thin-Walled Structures*, 2004.
- [USS15] J. Uhlemann, N. Stranhöner et K. Saxe : Comparison of stiffness properties of common coated fabrics. *Steel Construction*, 8:222–229, 2015.
- [Vas92] A. Vashy : Sur les lois de similitude en physique. *Annales Télégraphiques*, 19:25–28, 1892.
- [VBB04] S.L. Veldman, O.K. Bergsma et A. Beukers : Bending of anisotropic inflated cylindrical beams. *Thin-walled structures*, 2004.
- [Vel06] S.L. Veldman : Wrinkling prediction of cylindrical and conical inflated cantilever beams under torsion and bending. *Thin-walled structures*, 44:211–215, 2006.
- [VOB⁺15] J. Vinet, F. De Oliveira, C. Barre, E. Fayette, F. Consigny et R. Vondiere : Wind effects on stadium refurbishment - the example of stade velodrome in marseille, france. *14th conference on wind engineering*, 2015.
- [WDT12] C.G. Wang, Z.Y. Du et H.F. Tan : Initial wrinkling and its evolution of membrane inflated cone in bending. *Thin-walled structures*, 59:97–102, 2012.
-

- [Web82] J.P.H. Webber : Deflection of inflated cylindrical cantilever beam subjected to bending and torsion. *Aeronautical Journal*, 1982.
- [Wit15] J. F. Witz : Yadics : Yet another digital image correlation software - 2/3d - for fluid and solid applications. <http://yadics.univ-lille1.fr/wordpress/>, 2015.
- [Woo58] J.D. Wood : The flexure of a uniformly pressurized, circular, cylindrical shell. *Journal of applied mechanics*, 1958.
- [WSP68] V.I. Weingarten, P. Seide et J.P. Peterson : Buckling of thin-walled circular cylinders. Rapport technique, NASA SP-8007, 1968.
- [WT02] C. Wielgosz et J.C. Thomas : Deflections of inflatable fabric panels at high pressure. *Thin-Walled Structures*, 2002.
- [WT03] C. Wielgosz et J.C. Thomas : An inflatable fabric beam finite element. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19(4):307–312, 2003.
- [XG12] Y. Xu et F-L. Guan : Structure design and mechanical measurement of inflatable antenna. *Acta Astronautica*, 76:13–25, 2012.
- [Zen62] G.W. Zender : The bending strength of pressurized cylinders. *Journal of Aerospace Science*, 1962.
- [Zha10] L. Zhang : *Reliability analysis of fabric structures*. Thèse de doctorat, University of Newcastle, 2010.

Annexe - Fiches Techniques des Tissus

FERRARI 

10/87

FIL / YARN GARNTITER	PES HT	1100	Drax
MASSE TOTALE / TOTAL WEIGHT GESAMTGEWICHT	NF EN 2286 (5 g)	750	g/m
RESISTANCE RUPTURE* (CN/TR) TENSILE STRENGTH* (N/50N) / REISSKRAFT* (KG)	NFG 37.103	300/280	ca 4/5 cm
RESISTANCE DECHIRURE (CN/TR) TEAR STRENGTH (N/50N) / WEITERREISSKRAFT (KG)	DIN 53.383	30/28	ca 4
ADHERENCE / ADHESION HAFTUNG	NFG 37.107	10	ca 4/5 cm
REACTION AU FEU / FLAME RETARDANCY BRENNVERHALTEN	NF NF 32.303 / DR 4102 31 / BS 5433 / SIS 65002 / California State Fire Marshall		
EPAISSEUR D'ENDUCTION A LA CRETE DES FILS COATING THICKNESS AT THE TOP OF THE YARNS / BESCHICHTIGUNGSDICKE AN FADENSPITZEN		240	micron
TRAITEMENT DE SURFACE FLUOTOP® T : 100 % PVDF SURFACE TREATMENT FLUOTOP® T : 100 % PVDF / OBERFLÄCHENBE-ANLUNG FLUOTOP® T : 100 % PVDF			

précontraint® 702
Architecture textile

Textile architecture

Textiles Bauen

WIDTH / BREITE

FINISH / BEHANDLUNG

178 cm
Fluotop® T

Propriétés techniques	Précontraint 1202 S2	Précontraint 1202 Fluotop T2	Normes
Application	Structures mobiles ou permanentes	Climat tropical, structures fixes et permanentes	
Traitement de surface (endroits/envers)	PVDF / PVDF	PVDF HAUTE CONCENTRATION / PVDF	
Confection	Soudable	Soudable après abrasion de la surface	
Fil	PES HT 1100/1670 Dtex	PES HT 1100/1670 Dtex	
Poids	1050 g/m ²	1050 g/m ²	EN ISO 2286-2
Épaisseur totale	0.78 mm	0.78 mm	
Laize	267 cm	178 cm	(+1mm / -1mm)
Résistance rupture (chaîne/trame)	560/560 daN/5cm	560/560 daN/5cm	EN ISO 1421
Résistance déchirure (chaîne/trame)	80/65 daN	80/65 daN	DIN 53.363
Adhérence	12 daN/5cm	12 daN/5cm	EN ISO 2411
Réaction au feu			
Euroclasse	B-s2,d0/EN 13501-1	B-s2,d0/EN 13501-1	
Classement	B1/DIN 4102-1 • BS 7837 • Test2/NFPA 701 • CSMF T19		
Garantie*			



* Les caractéristiques techniques indiquées sont des valeurs moyennes avec une tolérance de +/- 5%

Longévité					
Épaisseur d'enduction en crête de fils	270 microns		270 microns		
Longévité de l'adhérence du vernis	QUV A 4000 h	conforme	QUV A 4000 h	conforme	Test Scotch
Évolution teinte blanche	QUV A 4000 h	ΔE = 5.5	QUV A 4000 h	ΔE = 3.5	CIE Lab
Résistance aux micro-organismes**	--		Méthode A : degré 0, excellent		EN ISO 846
Propriétés optico-solaires					
Transmission solaire (Ts)	ASHRAE 74-1988	EN 410	ASHRAE 74-1988	EN 410	
Réflexion solaire (Rs)	6%	6%	7%	7%	
Facteur solaire (g)	75%	80%	74%	79%	
Transmission lumière visible (Tv)	11%	10%	12%	11%	
Réflexion lumière visible (Rv)	--	4.5%	--	5%	
Transmission UV	--	88%	--	87%	
Transmission lumière visible (Tv)		T-UV 0%		T-UV 0%	
Transmission lumière visible (Tv)	9.5%		10%		NFP 38511 (diffus-diffus)
Conductance thermique globale***					
Position verticale / horizontale	U = 5.6 / 6.4 W/m ² /°C		U = 5.6 / 6.4 W/m ² /°C		
Performance acoustique					
Indice d'affaiblissement	14 dBA		14 dBA		ISO 717-1
LEED Îlots de chaleur					
Non roof (jusqu'à 2 points)	Solar Reflectance Index >95%		Solar Reflectance Index >95%		SSc 7.1
Roof (jusqu'à 1 point)	Solar Reflectance Index >95%		Solar Reflectance Index >95%		SSc 7.2/GIB C9 (ND)
Impact environnemental : ACV (Analyse de Cycle de Vie)					
Analyses comparatives en fonction des scénarios de fin de vie	Recyclage Taxyloop®		Incineration	Mise en décharge	Unité fonctionnelle = 1 m ² de matériau 1202 S2
Épuisement des ressources naturelles	0.023		0.10	0.10	kg eq Sb
Réchauffement climatique	2.60		4.846	4.193	kg eq CO ₂
Consommation d'énergie	60.2		107.1	107.1	Mégajoule eq.
Consommation d'eau	140.3		333.1	331.3	Litre
Systèmes de management					
Qualité conforme à					ISO 9001
Communication environnementale conforme à					ISO 14021
Certifications, labels, recyclabilité					



Rapports LEED et ACV (S2 et T2) disponibles sur demande

Les valeurs mentionnées dans ce document sont données à titre indicatif afin de permettre à notre clientèle le meilleur emploi de nos produits. Nos produits sont sujets à des évolutions en fonction des progrès techniques et nous nous réservons le droit d'en modifier les caractéristiques à tout moment. Il est de la responsabilité de l'acheteur de nos produits de vérifier la validité des données ci-dessus.

* Garantie : se référer à notre texte de garantie. La garantie s'applique au cas par cas, après demande et validation par Serge Ferrari. La garantie ne s'applique pas aux structures mobiles.

** Voir les études de cas à long terme en climat tropical (Brochure Longévité).

*** Ces données sont des valeurs obtenues par calcul lors de simulations des conditions moyennes d'utilisation et sont données comme ordre de grandeur.

L'acheteur de nos produits a la responsabilité de leur application ou de leur transformation en ce qui concerne d'éventuels droits des tiers. L'acheteur de nos produits a également la responsabilité de leur mise en œuvre et installation conformément aux normes, règles de l'art et règles de sécurité du pays de destination.

→ Contact

- Siège social : + 33 (0)4 74 97 41 33
- Votre contact local : www.sergeferrari.com

→ Service Prescription

- Tél. + 33 (0)4 74 83 59 59
- prescription@sergeferrari.com

→ Taxyloop®

- La filière de recyclage opérationnelle Serge Ferrari
- Matières premières secondaires à forte valeur intrinsèque, compatibles avec de multiples process
- Une réponse quantifiée pour lutter contre l'épuisement des ressources naturelles

www.taxyloop.com

www.sergeferrari.com

Serge Ferrari

Film blanc



Terraza

62 03 111001 31141101
e signon sede 1517



Ref. 550884

DENIA resine 4 PU Fire Retardant + UV filter + FC

TEJIDO / TOILE

COMPOSICIÓN: <i>Composition</i>	Urdimbre..... <i>Chaine</i>	Poliéster <i>Polyester</i>
	Trama..... <i>Trame</i>	Poliéster <i>Polyester</i>
TÍTULO DEL HILO: <i>Titre du fil</i>	Urdimbre..... <i>Chaine</i>	550 Dtex
	Trama..... <i>Trame</i>	550 Dtex
DENSIDAD: <i>Densité</i>	Urdimbre..... <i>Chaine</i>	17 Hilos ± 1 hilo <i>17 fils ± 1</i>
	Trama..... <i>Trame</i>	13 Pasada ± 1 pasada <i>13 fils ± 1</i>
LIGAMENTO: <i>Armure</i>	Taftán 1x1 <i>Toile</i>	

RECUBRIMIENTO / ENDUCTION

PRODUCTO: <i>Product</i>	Resina PU - 4 capas - + Hidrofugante <i>Polyurethane (PU) resine-4 couches + Fluorcarbón (FC)</i>
-----------------------------	--

ARTÍCULO ACABADO / TOTAL ARTICLE

PESO: <i>Poids</i>	220 g/m ² ± 5%
COLUMNA DE AGUA: <i>Imperméabilité</i>	2000 mm. (colonne d'eau)
REACCIÓN AL FUEGO: (Norme NFP 92-507) M2 <i>Classement Non-feux</i>	
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN (ISO 13934/1): <i>Résistance à la rupture par Traction (ISO 13934/1):</i>	
	Urdimbre (Chaine) 220.0 daN
	Trama (Trame) 160.0 daN
RESISTENCIA AL RASGADO (ISO 13937/1): <i>Résistance à la déchirure (ISO 13937/1):</i>	
	Urdimbre (Chaine) 8,00 daN
	Trama (Trame) 6,50 daN
ANCHO: <i>Largeur</i>	158 cm. ± 2%

1, 5, 1 - C/tales d'Asunción, 26-pk - Nueva 1-1 - 08210 Barcelona - España

